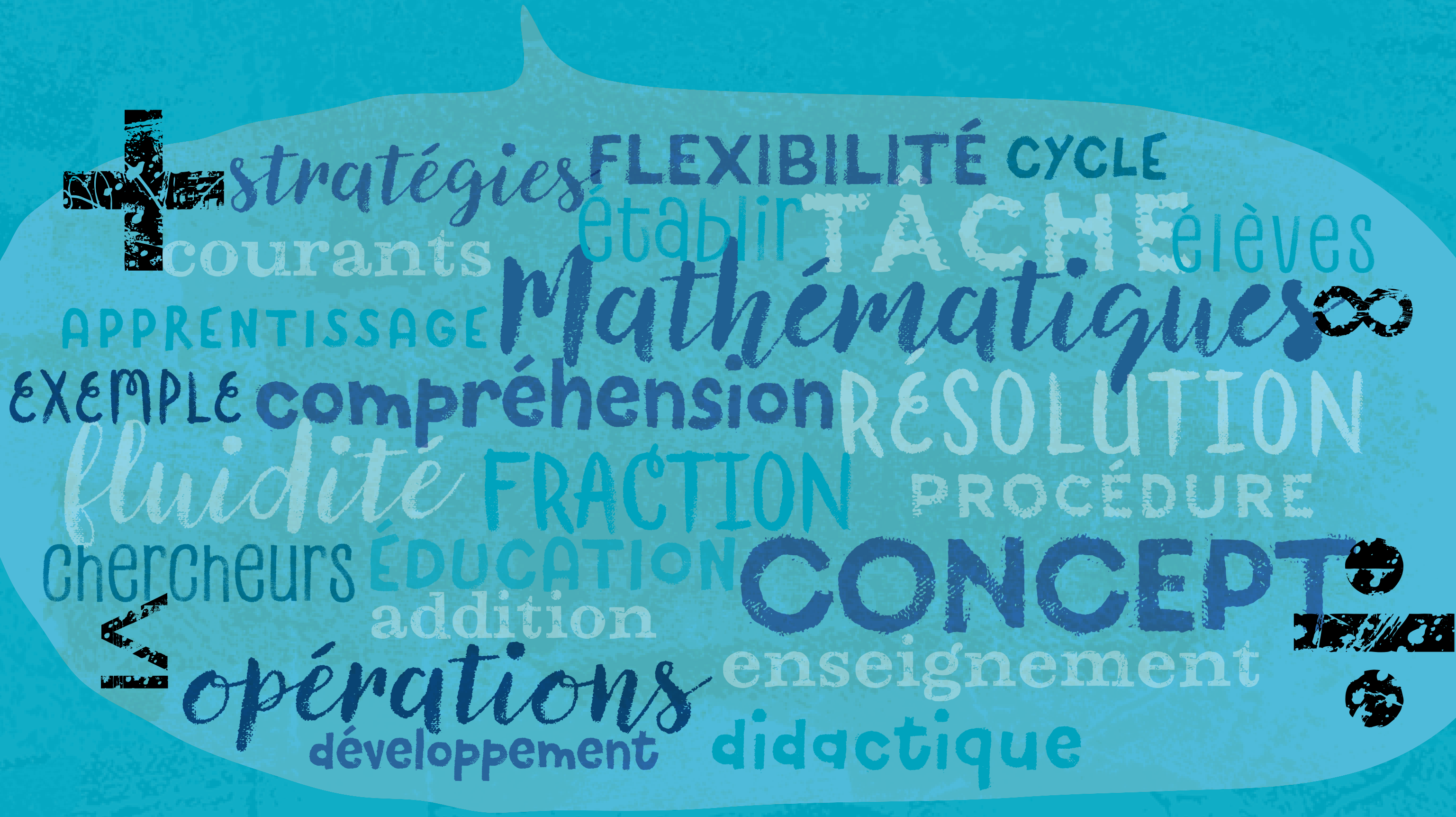
RÉFÉRENTIEL D'INTERVENTION EN MATHÉMATIQUE

AOÛT 2019



Votre gouvernement

Québec

Le présent document a été réalisé par
le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur.

Coordination
Sylvie Trudeau, chargée de projet, Direction des services de soutien et d'expertise

Rédaction
Jim Cabot Thibault, personne-ressource au Service régional de soutien et d'expertise
de la région Bas-St-Laurent–Gaspésie–Îles-de-la-Madeleine

Benoît Dumas, personne-ressource au Service régional de soutien et d'expertise
de la région de Montréal

Secrétariat
Cynthia Boutet, secrétaire, Direction des services de soutien et d'expertise

Coordination de la production, révision linguistique et édition
Direction des communications

Membres du comité de travail
- Sandra Beaulac, Direction des services éducatifs complémentaires et de l'intervention en milieu défavorisé
- Julie Bernier, enseignante, Commission scolaire des Navigateurs
- Jérôme Bouchard, Direction des services de soutien et d'expertise
- Jim Cabot Thibault, personne-ressource au Service régional de soutien et d'expertise de la région Bas-St-Laurent–Gaspésie–Îles-de-la-Madeleine
- Nathalie Crête, collaboratrice, Direction de la formation générale des jeunes
- Benoît Dumas, Services régionaux de soutien et d'expertise de la région de Montréal
- Geneviève Dupré, collaboratrice, Direction de la formation générale des jeunes
- Mariannik Toutant, responsable, Direction de la formation générale des jeunes

Collaboration Hélène Paradis, Direction de l'évaluation

Pour tout renseignement :
Renseignements généraux
Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur
1035, rue De La Chevrotière, 21e étage
Québec (Québec) G1R 5A5
Téléphone : 418 643-7095
Ligne sans frais : 1 866 747-6626

Ce document peut être consulté sur le site Web du Ministère :
www.education.gouv.qc.ca

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2019
Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur

ISBN 978-2-550-85152-3 (PDF)

REMERCIEMENTS

Merci aux différentes personnes qui ont contribué à la réalisation de ce référentiel. Plus particulièrement, nous aimerions saluer l'apport de Madame Virginie Houle, professeure, Université du Québec à Montréal, de plusieurs enseignants du primaire et du secondaire, de conseillers pédagogiques et de personnes-ressources pour les élèves ayant des difficultés d'apprentissage des services régionaux de soutien et d'expertise.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

Introduction

Comme le mentionne la plus récente politique de la réussite éducative élaborée par le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES) (2017a, p.14) :

> *Les compétences [...] en numératie sont largement reconnues comme les fondations sur lesquelles une personne peut construire son avenir. Plus ces compétences sont élevées et maintenues tout au long de la vie, plus la personne disposera de l'autonomie requise pour faire des choix éclairés dans sa vie personnelle, professionnelle et citoyenne.*

Étant donné l'importance du développement des compétences des élèves en numératie, la question de l'enseignement-apprentissage de la mathématique est une préoccupation importante dans plusieurs écoles du Québec à l'heure actuelle. Le MEES, dans la foulée des référentiels d'intervention en lecture (ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2012b) et en écriture (MEES, 2017b), propose de soutenir les acteurs scolaires à l'égard de cette préoccupation à l'aide du Référentiel d'intervention en mathématique.

Fondé sur les mêmes principes que ceux des référentiels précédents, ce référentiel s'appuie sur les connaissances issues de la recherche. Son objectif est de soutenir le développement des compétences mathématiques[1] des élèves, notamment de ceux qui risquent d'éprouver des difficultés dans cette discipline ou qui en éprouvent déjà. Il offre des balises aux équipes-écoles, leur permettant de réfléchir à leur pratique, de préciser leurs actions et, ainsi, de mieux répondre aux besoins des élèves en mathématique.

Le Référentiel d'intervention en mathématique met en lumière deux fondements de l'enseignement-apprentissage de la mathématique ainsi qu'une condition essentielle à leur actualisation en classe. Il contient également des exemples concrets de la mise en œuvre de ces fondements. Plus précisément, il apporte un éclairage à la question « Qu'est-ce que faire de la mathématique? ». **Une réflexion approfondie à propos de cette question se veut un préalable nécessaire à l'analyse des particularités des différents concepts et processus mathématiques.**

En effet, cette réponse permet de donner une orientation quant à la façon d'aborder les concepts mathématiques, de définir les intentions de la résolution de problèmes ainsi que de préciser le rôle de l'enseignant et celui de l'élève en classe de mathématique. À ce sujet, les recherches menées en enseignement-apprentissage de la mathématique au cours des quarante dernières années ont mis en évidence les deux fondements suivants de l'activité mathématique :

- **donner du sens à la mathématique en s'appuyant sur la compréhension des concepts et des processus mathématiques;**
- **recourir à la résolution de problèmes selon différentes intentions.**

1. Voir le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) (Ministère de l'éducation du Québec (MEQ), 2006a; MEQ, 2006b; MEQ, 2006c) pour plus de détails à propos des compétences à développer.

De plus, les recherches sur le sujet indiquent une condition essentielle à mettre en œuvre par les enseignants pour actualiser ces fondements en salle de classe :

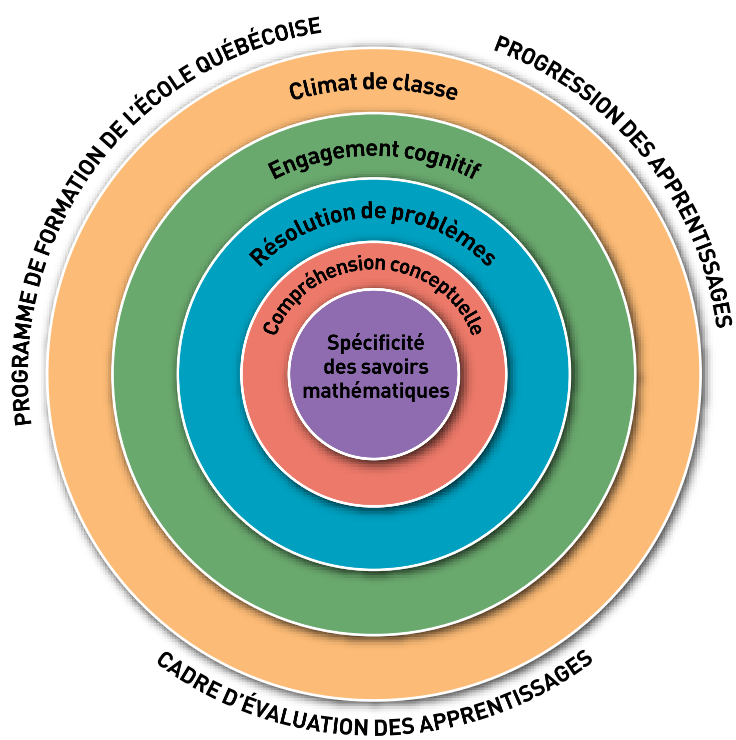
- mettre en place un climat de classe favorisant l'engagement cognitif et la participation active de l'élève.

Enfin, ces fondements supposent que l'enseignant ait une compréhension approfondie du développement et de l'évolution des concepts et des processus mathématiques, des obstacles qui leur sont inhérents ainsi que des situations qui favorisent leur apprentissage. En d'autres termes, il s'avère important que l'enseignant soit au clair à propos de la spécificité des savoirs mathématiques qu'il enseigne.

> Il s'avère important de préciser que le Référentiel d'intervention en mathématique se veut un levier supplémentaire pour l'actualisation des documents d'encadrement officiels propres à cette discipline et en vigueur au primaire et au secondaire, tels que le Programme de formation de l'école québécoise, la progression des apprentissages en mathématique et les cadres d'évaluation des apprentissages.

La figure 1, inspirée du modèle écologique de Bronfenbrenner (1979), illustre les différentes composantes de l'enseignement-apprentissage de la mathématique.

Figure 1 Différentes composantes de l'enseignement-apprentissage de la mathématique



Deux fondements de l'enseignement-apprentissage de la mathématique

La consultation d'un grand nombre d'écrits a permis de dégager les deux fondements suivants de l'enseignement-apprentissage de la mathématique :

- **donner du sens à la mathématique en s'appuyant sur la compréhension des concepts et des processus mathématiques** (Hiebert et Carpenter, 1992; MEQ, 2006a; MEQ, 2006b; MEQ, 2006c; Small, 2013);
- **recourir à la résolution de problèmes selon différentes intentions** (Martin et Theis, 2009; ministère de l'Éducation de l'Ontario [MEO], 2006; MEQ, 2006a; MEQ, 2006b; MEQ, 2006c; Van de Walle et Lovin, 2007).

En effet, plusieurs recherches mentionnent la place fondamentale qui doit être accordée à la compréhension des concepts et des processus mathématiques par la construction de leur sens et leur mobilisation dans des contextes variés. Dans cette perspective, les enseignants doivent aller bien au-delà d'une transmission de trucs, de techniques et de procédures vides de sens que l'élève doit mémoriser (DeBlois, 2014; Dionne, 1995; Hiebert et Carpenter, 1992; Schoenfeld, 1992; Van de Walle et Lovin, 2007). Si la transmission de ces trucs, de ces techniques et de ces procédures n'est pas soutenue par une compréhension approfondie des concepts en jeu, elle permettra à l'élève de réussir immédiatement des exercices d'application, mais aura des contrecoups importants à moyen et à long terme.

Par exemple, si l'on enseigne à l'élève que la multiplication par dix consiste à ajouter un zéro au nombre, comme 115 x 10 = 1150, un problème se posera lorsque viendra le temps de multiplier par dix des nombres décimaux, car 11,5 x 10 ≠ 11,50. Certains mentionneront alors à l'élève que, pour les nombres décimaux, il s'agit plutôt de déplacer la virgule d'une position vers la droite. L'apprentissage de la mathématique sera ainsi réduit à la mémorisation d'une série de procédures qui pourront être vraies dans certains cas et fausses dans d'autres, comme l'ajout d'un zéro lors de la multiplication par dix. Toute cette mémorisation ne permet pas de donner du sens à la mathématique et ne génère qu'une pratique pédagogique possible : dire et répéter les procédures à suivre.

Pour que l'élève ait une meilleure compréhension de la multiplication par dix, il est important de l'amener à construire le sens de ce qu'elle signifie et de tirer une généralité de ce que cela engendre par rapport à l'écriture. Lorsque viendra le temps de la multiplication par dix avec les nombres décimaux, un retour sur la multiplication par dix avec les nombres naturels pourra être fait par l'enseignant, ce qui permettra de constater quelque chose de différent sur le plan de l'écriture, c'est-à-dire déplacer la virgule d'une position vers la droite. De plus, l'enseignant pourra amener les élèves à faire des liens entre la multiplication par dix pour les nombres naturels et la multiplication par dix pour les nombres décimaux.

De plus, la résolution de problèmes est considérée comme faisant partie intégrante de l'activité mathématique. L'apprentissage de la mathématique peut se faire par la résolution de problèmes ou pour résoudre des problèmes.

Certains auteurs considèrent également la résolution de problèmes comme contexte pour l'apprentissage de stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes chez l'élève. Le Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) va également en ce sens en mentionnant que (MEQ, 2006c, p.115) :

> *Les stratégies cognitives et métacognitives accompagnent le développement et l'exercice des compétences mathématiques; elles sont intégrées au processus d'apprentissage. Bien que ces stratégies se construisent en interaction tout au long du cycle, il est possible de mettre l'accent sur certaines d'entre elles, selon la situation et l'intention poursuivie.*

L'enseignant peut donc utiliser la résolution de problèmes selon trois intentions :

- apprendre les concepts et les processus mathématiques;
- mobiliser, combiner et appliquer les concepts et les processus mathématiques;
- développer des stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes.

Il s'avère important de préciser que les auteurs ne s'entendent pas tous sur les rôles de l'élève et de l'enseignant en contexte de résolution de problèmes. De plus, certains ont émis de vives critiques à l'égard de l'enseignement de stratégies de résolution de problèmes (Houle et Giroux, 2016; Mercier, 2008; Sarrazy, 1997). Dans tous les cas, la résolution de problèmes ne relève pas de l'application d'une démarche séquentielle à tous les types de problèmes, telle une démarche impliquant « ce que je sais » et « ce que je cherche » (Fagnant, Demonty et Lejong, 2016; Goulet, 2018; MEQ, 1988; Picard, 2018; Poirier, 2001; De Corte et Verschaffel, 2008).

L'étude de Goulet (2018) a permis de dégager cinq constats en lien avec les effets de l'enseignement séquentiel de cette démarche :

- elle réduit l'enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes à une méthode;
- elle amène les élèves à devenir des exécutants plutôt que des « solutionneurs »;
- elle limite la résolution de problèmes à l'intention de mobiliser et d'appliquer les concepts une fois qu'ils ont été appris;
- elle ajoute à la tâche des élèves sans leur permettre de mieux résoudre les problèmes, plusieurs résolvant d'abord un problème et effectuant ensuite les différentes sections de la démarche;
- elle est jugée difficile à comprendre et inutile par plusieurs élèves.

Il est à noter que ce n'est pas la démarche en soi qui pose problème, mais bien la façon dont elle est utilisée. En ce sens, Goulet (2018, p. 281) mentionne ce qui suit :

> *[…] il faut s'assurer que la méthode est introduite dans les classes de façon à favoriser la réflexion des élèves et à éviter qu'au contraire, elle limite leur créativité.*

Cette première section permet de présenter de façon plus détaillée ces deux fondements de l'enseignement-apprentissage de la mathématique.

Donner du sens à la mathématique en s'appuyant sur la compréhension des concepts et des processus mathématiques

La compréhension occupe une place prépondérante dans les recherches sur l'enseignement-apprentissage de la mathématique. Dans cette section, la compréhension conceptuelle ainsi que les concepts de flexibilité et de fluidité qui y sont liés seront définis pour montrer comment l'interrelation entre ces trois éléments donne du sens à la mathématique.

La compréhension conceptuelle

La compréhension conceptuelle est vue comme une assise de l'enseignement-apprentissage de la mathématique par un grand nombre d'auteurs (Ansari, 2015; Carpenter et Lehrer, 1999; Dionne, 1995; Herscovics et Bergeron, 1982; Hiebert et Carpenter, 1992; National council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000; National Mathematics Advisory Panel [NMAP], 2008; Small, 2013; Stylianides et Stylianides, 2007; Van de Walle Lovin, Karp et Bay-Williams, 2013.).

Forbringer et Fuchs (2014, p. 28, traduction libre) mentionnent que :

> *Historiquement, l'enseignement des mathématiques a donné une grande importance à l'apprentissage et à la mémorisation de procédures et de techniques. Les élèves apprenaient des procédures, mais manquaient souvent de compréhension conceptuelle. Cela menait plusieurs élèves à pouvoir réussir rapidement et correctement un grand nombre d'exercices sans toutefois être capables d'appliquer les mêmes habiletés lorsqu'ils faisaient face à des problèmes mathématiques contextualisés. Pour améliorer la compétence des élèves en mathématique, les chercheurs et les enseignants ont commencé à mettre en évidence l'importance de la compréhension conceptuelle [...].*

DeBlois (2014, p.236) établit, pour sa part, une différence entre la compréhension et la réussite : la compréhension « suscitera une adaptation des savoirs en jeu pour un ensemble de tâches », ce qui n'est pas nécessairement le cas lorsque l'élève réussit sans comprendre. Ainsi, une compréhension du concept favorisera sa mobilisation dans d'autres contextes et permettra à l'élève de développer un savoir flexible transférable et généralisable (Rittle-Johnson, Siegler et Alibali, 2001).

Hiebert et Carpenter (1992)[2] mentionnent également que la compréhension permet d'assimiler davantage de connaissances en mathématique et réduit la quantité d'éléments qui doivent être mémorisés, c'est-à-dire que les liens établis entre des concepts par la compréhension conceptuelle favorisent leur rétention par l'élève.

2. La compréhension conceptuelle a fait l'objet de plusieurs recherches dans les années 1980 et 1990. Les données issues de ces recherches demeurent encore pertinentes à ce jour.

La compréhension conceptuelle est un élément fondamental de l'enseignement-apprentissage de la mathématique. Elle est principalement définie sous deux angles :

- **Le « quoi » et le « pourquoi » d'un concept** (NCTM, 2014; Van de Walle et autres, 2013.)[3]. Par exemple, la compréhension conceptuelle de la fraction pourrait se traduire par des réponses à différentes questions. Qu'est-ce qu'une fraction? Quel rôle jouent le numérateur et le dénominateur dans une fraction qui représente une partie d'un tout ou d'une collection? Qu'est-ce qu'une fraction équivalente?
- **L'établissement de liens entre les différents éléments d'un concept ou entre des concepts** (Carpenter et Lehrer, 1999; Dionne, 1995; Hiebert et Carpenter, 1992; NCTM, 2014; Schneider, Rittle-Johnson et Star, 2011; Rittle-Johnson, Siegler et Alibali, 2001; Van de Walle et autres, 2013).

Le tableau suivant présente des exemples de liens qu'on peut établir, d'une part, entre les différents éléments d'un concept et, d'autre part, entre ce concept et d'autres concepts.

Tableau 1 Exemples de liens que l'on peut établir entre les différents éléments d'un concept et entre des concepts

Concept	Liens qu'on peut établir entre les éléments de ce concept	Liens qu'on peut établir avec d'autres concepts
Numération (groupement)	Si le groupement de dix unités forme une dizaine (équivalence), alors on peut échanger une dizaine pour dix unités (équivalence).	Les échanges et les équivalences (groupement) sont utilisés pour les opérations d'addition et de soustraction : • retenue : grouper dix unités pour former une dizaine; • emprunt : échanger une dizaine pour dix unités.
Fraction	Si le dénominateur indique en combien de parties équivalentes le tout a été partitionné, alors plus le dénominateur augmente pour un tout, plus les parties de celui-ci sont petites.	Établir le lien entre le fait que plus je divise un tout en un grand nombre de parties, plus j'ai besoin de parties pour compléter mon tout et la grandeur des unités conventionnelles de mesure de longueur (1 mètre = 10 décimètres = 100 centimètres = 1000 millimètres).

La compréhension d'un concept permet d'établir des liens entre les différents éléments qui le composent. Au Québec, le modèle de la compréhension de Herscovics et de Bergeron (1982) a été utilisé par plusieurs chercheurs (Boulet, 1993; Dionne, 1995). Il permet de définir les éléments d'un concept selon quatre types de compréhension distincts : intuitive, procédurale, abstraite et formelle. Le tableau 2 montre un exemple d'analyse conceptuelle de la fraction à l'aide de ce modèle. Cette analyse est inspirée de Boulet (1993).

3. Le terme « concept » englobe les processus mathématiques qui s'y rattachent.

Tableau 2 Illustration d'une analyse conceptuelle effectuée à l'aide du modèle de Herscovics et de Bergeron (1982), inspirée de l'analyse du concept de fraction de Boulet (1993)

Type de compréhension	Définition	Exemple
Intuitive	Construction des connaissances informelles principalement à partir des perceptions sensorielles.	L'élève peut différencier le tout et ses parties dans un objet ou une collection d'objets.
Procédurale	Acquisition de procédures que l'enfant peut relier à ses connaissances intuitives et utiliser de façon appropriée (Dionne, 1995, p. 205).	L'élève partage un objet ou une collection d'objets en découpant, en pliant, en mesurant ou en dénombrant.
Abstraite	Construction d'invariants et de principes généralisables (Dionne, 1995).	L'élève comprend que, pour une fraction unitaire (le numérateur étant un), plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite. Il peut l'expliquer à l'aide de matériel concret ou d'un schéma.
Formelle	Utilisation des symboles et des procédures conventionnels.	L'élève utilise les termes « numérateur » et « dénominateur » et connaît leurs rôles respectifs.

L'analyse conceptuelle permet de fournir des manifestations de la compréhension des concepts.

> La connaissance et la compréhension des manifestations des concepts (spécificité des savoirs mathématiques) par l'enseignant représentent un préalable nécessaire à l'enseignement (Morin, 2003; NMAP, 2008).

Plusieurs élèves éprouvent des difficultés à mobiliser les concepts mathématiques appris dans de nouveaux problèmes qui leur sont présentés. Le développement de la compréhension conceptuelle, notamment de la compréhension abstraite, favorisera la réutilisation des connaissances dans plusieurs contextes. Pour ce faire, il est important d'institutionnaliser[4] les concepts, c'est-à-dire d'expliquer aux élèves les attributs essentiels des concepts mathématiques, qui pourront être réutilisés pour résoudre d'autres problèmes.

Il importe également de présenter des situations variées faisant appel à un même concept (Houle, 2016a, p. 16) :

> *[...] les élèves sont appelés, lorsqu'ils font face à une nouvelle situation, à utiliser les connaissances qu'ils possèdent, mais aussi à les adapter en fonction des contraintes spécifiques à la situation en question, ce qui les conduit à redéfinir et à préciser leurs connaissances.*

En somme, il est important pour l'enseignant de faire des allers-retours entre des moments où les élèves sont amenés à construire leur compréhension d'un concept, par des tâches décontextualisées, avec ou sans matériel de manipulation, par un questionnement ciblé de l'enseignant, etc., et une variété de problèmes contextualisés faisant appel à ce même concept.

4. L'institutionnalisation est un concept de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) qui peut se définir comme une situation qui se dénoue par le passage, pour une connaissance, de son rôle de moyen de résolution d'une situation à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives.

La flexibilité

La flexibilité est un deuxième élément que l'élève doit aussi développer (Arslan et Yazgan, 2015; Baroody, Feil et Rittle-Johnson, 2007; Elia, van den Heuvel-Panhuizen et Kolovou, 2009; Hatano, 1982; Heinze, Star et Verschaffel, 2009; NCTM, 2014; Rittle-Johnson et Star, 2007; Star et Seifert, 2006; Star, 2005; Verschaffel, Luwel, Torbeyns et Van Dooren, 2009). Elle fait référence au fait que **l'élève connaisse plusieurs façons d'effectuer une tâche** (Arslan et Yazgan, 2015; Kilpatrick, Swafford et Findell, 2001; MELS, 2009; MELS, 2010; Rittle-Johnson et Star, 2007; Star et Seifert, 2006). Les deux exemples qui suivent illustrent la flexibilité.

Plusieurs façons d'effectuer une tâche

EXEMPLE 1

Pour effectuer l'opération « 14 + 19 », l'élève peut faire :

- 14 + 20 – 1 = 33;
- 14 + 16 + 3 = 33;
- 19 + 11 + 3 = 33.

Il peut aussi utiliser du matériel, un schéma ou l'algorithme conventionnel.

Ces diverses façons d'effectuer une addition s'appuient sur la compréhension du sens du nombre, de la numération et des propriétés des opérations additives. Ainsi, l'élève comprend la décomposition des nombres (19 = 16 + 3), les compléments de 10, la commutativité et les liens entre ces trois éléments (utilisation de la décomposition pour obtenir un complément de 10 dans l'addition).

Plusieurs façons d'effectuer une tâche

EXEMPLE 2

Pour trouver 20 % de 450, l'élève peut recourir à l'un des raisonnements qui suit.

- Je sais que 20 % de 450 correspond à $\frac{1}{5}$ de 450. Puisque le dénominateur indique en combien de parties équivalentes l'entier a été divisé, je divise 450 par 5, ce qui équivaut à 90. Chacune des parties est donc équivalente à 90. Étant donné que le numérateur indique que je dois prendre une seule des parties équivalentes, je considère une partie pour obtenir mon résultat, soit 90.
- Je sais que 10 % de 450 correspond à 45 puisque je cherche une valeur 10 fois plus petite (10 % équivaut à un dixième). Puisque 20 % est le double de 10 %, je multiplie 45 (10 % de 450) par 2. Le produit obtenu, soit 90, est la réponse cherchée (20 % de 450).
- Je sais que 450 peut être décomposé comme suit : 4 x 100 + 50. La notation fractionnaire de 20 % étant $\frac{20}{100}$, je considère 20 parties pour chaque tranche de 100. Puisqu'il y a 4 centaines, je multiplie 20 par 4. Le produit obtenu est 80. Puisque 50 (nombre restant de la décomposition) est la moitié de 100, je prends la moitié de 20, soit 10. En additionnant 80 et 10, j'obtiens une somme de 90.

Dans ce dernier exemple, l'élève s'appuie sur sa compréhension des concepts de pourcentage, de fraction, de décomposition de nombres et de division, de même que sur sa connaissance de certains faits numériques. Il établit également diverses relations entre ces concepts.

> De façon générale, le fait d'inciter l'élève à trouver plusieurs solutions pour une même tâche lui demandera de s'appuyer sur sa compréhension de plusieurs concepts et d'établir des liens entre ceux-ci. Il ne pourra pas se rabattre sur une seule procédure automatisée qui peut être retenue sans compréhension. C'est donc dire que de travailler cet aspect de la flexibilité permettra à l'élève de renforcer sa compréhension conceptuelle.

Les deux exemples ci-dessus illustrent la flexibilité par rapport aux concepts. Le même principe s'applique en contexte de résolution de problèmes, c'est-à-dire qu'un élève faisant preuve de flexibilité en mathématique sera capable de trouver différentes façons de s'y prendre pour résoudre un même problème.

Pour plusieurs auteurs, le fait de connaître plusieurs façons d'effectuer une tâche n'est pas suffisant pour définir la flexibilité. Par exemple, Star et Seifert (2006, p. 283, traduction libre) mentionnent ce qui suit :

> *Même si la connaissance de multiples procédures pour réaliser une tâche est clairement nécessaire, ce n'est pas suffisant pour définir le concept de flexibilité. Un élève faisant preuve de flexibilité n'aura pas seulement la connaissance de plusieurs façons pour réaliser une tâche. Il aura également la capacité d'inventer de nouvelles procédures pour réaliser des tâches qui ne sont pas familières ou pour trouver la façon la plus efficiente de réaliser une tâche familière.*

Les propos de Star et de Seifert (2006), partagés par plusieurs autres auteurs (Heinze, Star et Verschaffel, 2009; Rittle-Johnson et Star, 2007; Schneider, Rittle-Johnson et Star, 2011; Verschaffel et autres, 2009), ajoutent deux autres éléments à la définition de la flexibilité :

- **inventer une nouvelle procédure dans une tâche non familière ou non routinière;**
- **utiliser la façon la plus optimale ou efficiente possible d'effectuer une tâche familière**.

Pour pouvoir inventer une nouvelle procédure dans une tâche non familière, l'élève doit reconnaître, dans cette tâche, des éléments qui se rattachent à des concepts compris.

Par exemple, un élève de première année à qui l'on demanderait d'effectuer l'opération « 14 + 17 » à l'aide de processus personnels, alors qu'il n'a fait que des additions sans retenue jusqu'à présent, pourrait mobiliser la décomposition de nombres et les compléments de 10 (p. ex. : 14 + 17 = 14 + 10 + 7 = 24 + 7 = 24 + 6 + 1 = 30 + 1 = 31), qu'il connaît déjà. Avec le temps, cette utilisation de la décomposition de nombres et des compléments de 10 pour additionner deviendra fluide.

EXEMPLE 3

Une façon efficiente d'effectuer une tâche familière

On demande à l'élève d'effectuer l'addition suivante : $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$.

L'élève comprend, à l'aide de matériel concret ou d'un schéma, que la fraction $\frac{1}{2}$ est équivalente à la fraction $\frac{5}{10}$. Il utilise donc la représentation des fractions $\frac{5}{10}$ et $\frac{1}{10}$ pour effectuer l'addition. Il obtient alors une représentation de la fraction $\frac{6}{10}$. Il constate qu'il peut regrouper les parties deux à deux et que la fraction $\frac{6}{10}$ est ainsi équivalente à la fraction $\frac{3}{5}$.

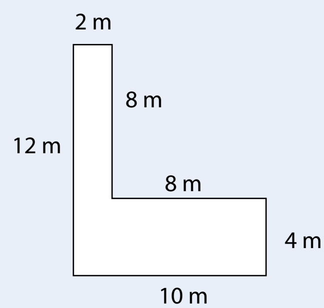
L'élève pourrait aussi faire appel à l'algorithme d'addition de fractions.

* Dans certains cas, la procédure la plus efficiente peut varier d'un élève à un autre.

EXEMPLE 4

Développer une façon d'effectuer une tâche non familière

On demande à un élève du premier cycle du secondaire de trouver l'aire de la figure suivante. Jusqu'à présent, l'élève connait les formules pour calculer l'aire des différents quadrilatères. Pour effectuer cette tâche, il décompose la figure en deux ou trois rectangles et fait la somme des aires pour trouver l'aire totale. L'élève pourrait également compléter la figure pour former un grand rectangle, calculer l'aire totale de ce rectangle puis soustraire l'aire du petit rectangle qui a été ajouté au coin supérieur droit.



La fluidité

La fluidité fait référence à la connaissance, à la rétention et à l'automatisation de faits et de procédures. Elle se rapporte, entre autres, à la connaissance et à la mémorisation des faits numériques de l'addition et de la multiplication ou à la mémorisation des algorithmes de calcul conventionnels. La fluidité ne se limite pas à l'arithmétique.

Par exemple, un élève peut avoir mémorisé et automatisé une procédure permettant de résoudre une équation algébrique du premier degré ou avoir mémorisé les différentes formules d'aire des figures planes. Il peut également avoir automatisé certains éléments en lien avec la flexibilité. Par exemple, lorsqu'il doit effectuer une addition, le fait de décomposer des nombres pour créer des compléments de dix est un automatisme pour lui.

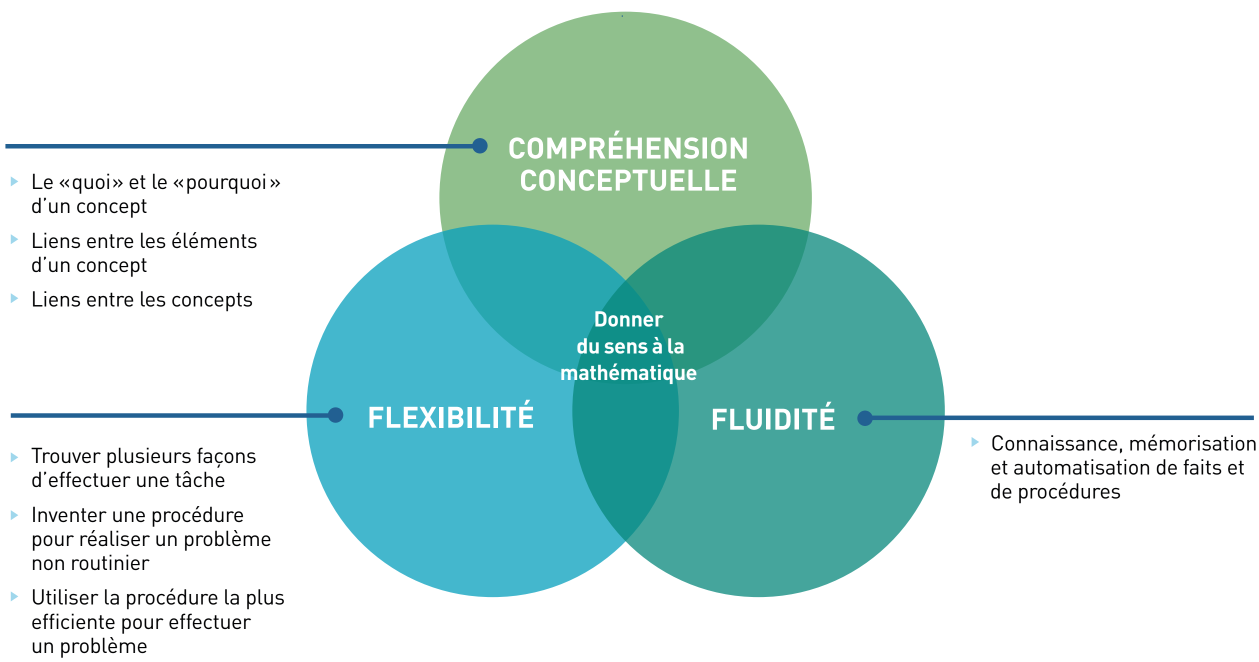
Certains élèves éprouvent de la difficulté avec la résolution de problèmes parce qu'ils ne connaissent pas leurs faits numériques. Ainsi, ils prennent beaucoup de temps à chacune des étapes de la résolution pour trouver les résultats de calculs simples, ce qui les amène souvent à perdre le fil de cette résolution.

Par contre, un élève qui a mémorisé plusieurs faits et procédures, sans que cela provienne d'une compréhension du concept, aura également de la difficulté à résoudre des problèmes puisqu'il reconnaîtra difficilement les concepts à mobiliser (Forbringer et Fuchs, 2014). Ces derniers propos montrent toute l'importance de l'arrimage entre la compréhension conceptuelle, la flexibilité et la fluidité.

Le schéma qui suit présente les liens entre la compréhension conceptuelle, la flexibilité et la fluidité.

L'enseignant de mathématique devrait d'abord miser sur le développement de la compréhension conceptuelle pour que cette dernière assure une base solide pour le développement de la flexibilité et de la fluidité. La section qui suit montre un exemple concret de l'interrelation entre ces trois composantes, et la section d'ensuite présente une stratégie d'enseignement pouvant la favoriser.

Figure 2 **Donner du sens à la mathématique par l'interrelation entre la compréhension conceptuelle, la flexibilité et la fluidité**



L'interrelation entre la compréhension conceptuelle, la flexibilité et la fluidité

Plusieurs chercheurs insistent sur l'importance de l'interrelation entre la compréhension conceptuelle, la flexibilité et la fluidité (Ansari, 2015; Hiebert et Carpenter, 1992; Grabner. Ansari, Koschutnig, Reishofer, Ebner et Neuper, 2009; NCTM, 2014; Schneider. Rittle-Johnson et Star, 2011; Star et Seifert, 2006). Comme le mentionne Ansari (2015), le débat visant à déterminer si l'enseignement-apprentissage de la mathématique devrait être focalisé davantage sur la compréhension conceptuelle ou sur la fluidité est révolu. Ansari ajoute :

> *[...] il y a une grande quantité de recherches qui montrent que les enfants apprennent mieux [la mathématique] lorsque les approches basées sur la compréhension et sur la fluidité sont combinées ».*[5]

Selon plusieurs recherches, la fluidité doit s'appuyer sur une compréhension des concepts, c'est-à-dire que la compréhension conceptuelle est traitée en amont de la fluidité (Ansari, 2015; DeCaro et Rittle-Johnson, 2012; NCTM, 2014; NMAP, 2008; Van de Walle et autres, 2013). Qui plus est, Ashcraft (2002) mentionne qu'un passage trop rapide vers la fluidité peut diminuer la confiance et l'intérêt des élèves à l'égard de la mathématique.

Par exemple, l'apprentissage des différents algorithmes de calcul conventionnels doit s'appuyer sur une compréhension des concepts en jeu (sens du nombre, sens des opérations, propriétés des opérations, etc.). C'est pour cette raison que les processus de calcul conventionnels (algorithmes) de l'addition et de la soustraction doivent être maitrisés seulement à la fin de la quatrième année du primaire et que ceux de la multiplication et de la division doivent l'être seulement à la fin de la sixième année du primaire (MELS, 2009).

C'est donc dire que la maîtrise des processus de calcul conventionnels est précédée par un travail de plusieurs années visant à donner du sens aux nombres et aux opérations, notamment à l'aide des processus personnels de calcul écrit et de calcul mental (MELS, 2009).

> En classe, l'enseignant doit établir un lien explicite entre la fluidité dont font preuve ses élèves et la compréhension conceptuelle qui sous-tend cette fluidité, par exemple expliquer que la retenue dans l'algorithme d'addition correspond au principe d'échange.

Cette compréhension conceptuelle permet à l'élève de donner du sens aux procédures qu'il suit et fournit à l'enseignant un levier, autre que la mémoire, permettant de soutenir l'élève lorsque son raisonnement est erroné.

5. Traduction libre

Enseignant qui utilise la compréhension conceptuelle comme levier lors d’une intervention auprès d’un élève

EXEMPLE 5

Un élève de cinquième année du primaire effectue le calcul suivant : 25 x 7.

Sa solution est la suivante:

$$\begin{array}{r} {}^{3} \\ 25 \\ \times \quad 7 \\ \hline 65 \end{array}$$

L’élève reproduit la procédure de l’algorithme d’addition pour la multiplication (7 x 5 = 35, placer 3 en retenue, puis effectuer 3 x 2 = 6). Il serait peu efficace ici de seulement lui répéter les étapes de l’algorithme de multiplication.

En se référant au lien entre la compréhension conceptuelle et la fluidité, il serait important de revenir avec l’élève sur le sens de la multiplication. On pourrait, par exemple, lui demander de faire une approximation du résultat de cette multiplication ou de la représenter à l’aide de matériel de manipulation. Cette intervention lui permettrait de constater l’erreur qu’il a commise.

Interrelation entre la compréhension conceptuelle, la flexibilité et la fluidité

EXEMPLE 6

L’exemple de l’addition des fractions $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ sera repris pour illustrer les différentes relations qui existent entre la compréhension conceptuelle, la flexibilité et la fluidité.

Pour que cette tâche ait du sens, l’élève doit comprendre les concepts entourant la fraction :

- les rôles respectifs du numérateur et du dénominateur;
- l’équivalence de deux fractions;
- la possibilité de transformer les fractions de façon qu’elles aient le même dénominateur et de les additionner;
- la nécessité d’avoir un même tout de référence pour opérer sur des fractions;
- le lien entre les formes d’écriture, soit la notation fractionnaire et la notation décimale.

Cela étant compris, il peut effectuer la tâche de plusieurs façons, dont les deux suivantes.

Par exemple, il peut comprendre, à l’aide de matériel concret ou d’un schéma, que la fraction $\frac{1}{2}$ est équivalente à la fraction $\frac{5}{10}$ et l’utiliser pour effectuer l’addition. Il obtient donc une représentation visuelle de la fraction $\frac{6}{10}$, qu’il peut réduire à sa plus simple expression, soit $\frac{3}{5}$, en utilisant du matériel concret ou un schéma.

Il peut aussi exprimer en notation décimale les nombres exprimés en notation fractionnaire. Ce passage d’une écriture à une autre doit, de prime abord, être axé sur la conceptualisation avant de passer à l’automatisation. En ce sens, à l’aide de matériel concret ou d’un dessin, l’élève peut établir une relation d’égalité entre les deux notations, soit $\frac{1}{2}$ = 0,5 et $\frac{1}{10}$ = 0,1. Par la suite, il additionne les nombres décimaux et obtient la somme de 0,6. À l’aide de matériel concret ou d’un dessin, il peut établir une relation d’égalité entre les deux notations, soit 0,6 = $\frac{6}{10}$.

Ces deux exemples montrent l’importance du lien entre la compréhension conceptuelle et la flexibilité. Ces diverses façons d’effectuer cette addition s’appuient sur la compréhension du sens du nombre, des équivalences et des opérations.

L’élève peut également automatiser certains éléments en lien avec la compréhension conceptuelle et la flexibilité. Par exemple, lorsqu’il doit additionner des fractions, il peut construire des fractions équivalentes pour trouver des fractions ayant un dénominateur commun. De plus, pour additionner des fractions dont le passage à la notation décimale lui est évident, l’élève peut utiliser cette notation et opérer sur les nombres décimaux. La construction de fractions équivalentes ou le choix d’une forme d’écriture peut devenir un automatisme pour lui. L’automatisation fait référence à la fluidité.

La causerie mathématique

La causerie mathématique est une stratégie pédagogique qui permet à l'élève de développer et de consolider sa compréhension conceptuelle, sa flexibilité et sa fluidité (Berger, 2017; Boaler, 2015; Parrish, 2011). Comme le mentionne Parrish (2011, p. 204)[6] :

> *Une causerie mathématique est une discussion de groupe de cinq à quinze minutes autour d'un problème de calcul mental judicieusement choisi par l'enseignant.*

Concrètement, le fonctionnement[7] d'une causerie mathématique est le suivant. D'abord, l'enseignant présente un court problème sous la forme d'une image, d'une photo, d'un texte ou d'une expression mathématique. Ce problème peut être familier aux élèves ou non.

L'enseignant laisse environ une trentaine de secondes aux élèves pour qu'ils tentent individuellement de résoudre le problème mentalement. Il leur mentionne que le but est non seulement de résoudre le problème, mais aussi d'expliquer son raisonnement. Il les invite à trouver plus d'une façon de résoudre ce problème.

Un signe préalablement établi par l'enseignant lui permet de repérer les élèves qui pensent avoir la solution et de connaître le nombre de stratégies différentes trouvées par chacun. Ce signe peut être que l'élève place le poing sur sa poitrine et lève son pouce lorsqu'il trouve une stratégie permettant de résoudre le problème proposé. L'élève peut lever le nombre de doigts correspondant au nombre de stratégies qu'il a trouvées, le cas échéant.

Il est important que le signe établi ne demande pas à l'élève de lever la main lorsqu'il a une stratégie pour résoudre le problème. En effet, le fait que certains élèves lèvent la main rapidement peut provoquer deux réactions chez celui qui prend plus de temps pour le faire : il se décourage de ne pas trouver la solution aussi rapidement que ses camarades ou il se dit qu'il n'a pas besoin de s'efforcer de la découvrir puisque d'autres l'ont fait pour lui. Un signe plus discret comme celui du poing sur la poitrine peut diminuer ces deux effets.

Ensuite, l'enseignant laisse environ deux minutes aux élèves pour qu'ils partagent en dyades leurs différentes solutions et les diverses stratégies qu'ils ont utilisées pour les obtenir.

Finalement, l'enseignant anime une discussion de groupe dans laquelle il demande aux jeunes de partager leurs stratégies en se focalisant sur le processus et non seulement sur le résultat obtenu. Il commence par solliciter des élèves qui ont trouvé seulement une stratégie. Son rôle est alors de stimuler la verbalisation des raisonnements des élèves, de reformuler certains propos, de les amener à appuyer leurs propos sur différents modes de représentation, de mettre en lumière les liens existant entre les diverses solutions présentées et de questionner. Son but n'est pas de corriger sur-le-champ les erreurs des élèves. Au contraire, il leur demandera régulièrement s'ils croient que les solutions et les stratégies présentées sont exactes et de justifier leurs affirmations. Cela nécessite de faire de la classe une communauté d'apprenants. À la fin de la discussion, le groupe, soutenu par l'enseignant, analyse la justesse des différentes solutions et stratégies présentées. Finalement, l'enseignant questionne le groupe afin que chaque élève détermine la stratégie la plus efficiente pour lui.

6. Traduction libre

7. Voir le lien suivant pour une vidéo qui donne un exemple d'une causerie mathématique en classe : **https://www.taalecole.ca/video-bavardages-mathematiques/**

La causerie mathématique permet d'approfondir la compréhension conceptuelle et de développer des stratégies au service de la fluidité, comme l'utilisation des compléments de dix pour calculer mentalement. Elle demande également aux élèves de verbaliser leur raisonnement, de faire preuve de métacognition, d'utiliser différents modes de représentation et de comparer leurs solutions à celles des autres élèves de la classe. Bref, la causerie mathématique leur permet d'être engagés cognitivement et actifs dans l'apprentissage. Elle repose sur les discussions de groupe, qui est l'un des facteurs reconnus comme étant les plus puissants pour l'apprentissage (Hattie, 2017).

Qui plus est, la causerie mathématique peut être une bonne stratégie pédagogique à utiliser pour le développement des processus de calcul mental qui font partie intégrante des programmes du primaire et du secondaire (voir, par exemple, la progression des apprentissages du primaire (p. 13) : « Développer des processus de calcul mental » avec les nombres décimaux et la progression des apprentissages du secondaire (p. 10) : « À l'aide de processus personnels, effectuer mentalement l'une ou l'autre des opérations »).

> En résumé, la compréhension conceptuelle est vue comme une assise fondamentale de l'enseignement de la mathématique par plusieurs auteurs. Elle correspond au « quoi » et au « pourquoi » d'un concept. Elle peut se manifester par les liens entre les différents éléments d'un même concept ou les liens entre des concepts. Pour sa part, la flexibilité comprend les trois dimensions suivantes : trouver plusieurs façons d'effectuer un problème, inventer une façon de résoudre un problème non familier et trouver la façon la plus efficiente de résoudre un problème. Finalement, la fluidité fait référence à la connaissance, à la rétention et à l'automatisation de faits et de procédures.
>
> La compréhension conceptuelle, la flexibilité et la fluidité doivent être travaillées en concomitance en portant une attention particulière à la compréhension. Cette interrelation permet de générer le sens des concepts et des processus mathématiques.

Recourir à la résolution de problèmes selon différentes intentions

La résolution de problèmes[8] est un thème traité dans un très grand nombre d'écrits scientifiques portant sur l'enseignement-apprentissage de la mathématique. Toutefois, les auteurs consultés ne lui attribuent pas tous la même définition. Par exemple, Martin et Theis, 2009, p. 2) affirment que :

> *[...] malgré la valeur qui lui est reconnue dans les écrits, les articles et ouvrages scientifiques traitant de l'activité de résolution sont divisés quant à la sémantique de ce concept.*

Certains la considèrent davantage comme une modalité pédagogique permettant l'apprentissage de nouveaux concepts mathématiques (apprendre la mathématique PAR la résolution de problèmes). D'autres en parlent comme un moyen de permettre la consolidation et l'application de concepts mathématiques déjà appris (apprendre la mathématique POUR résoudre des problèmes). Finalement, elle peut servir de contexte pour le développement de stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes (résoudre des problèmes pour apprendre à résoudre des problèmes).

Ces trois intentions de l'utilisation de la résolution de problèmes seront détaillées dans les prochaines sections :

- **apprendre la mathématique PAR la résolution de problèmes :** utilisation de la résolution de problèmes comme modalité pédagogique;
- **apprendre la mathématique POUR résoudre des problèmes :** utilisation de la résolution de problèmes pour mobiliser les concepts et processus mathématiques appris;
- **résoudre des problèmes pour apprendre à résoudre des problèmes :** développement de stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes.

Enseignement-apprentissage de la mathématique PAR la résolution de problèmes

La résolution de problèmes est souvent considérée comme une modalité pédagogique pour l'apprentissage des concepts et des processus mathématiques (Brousseau, 1998; Lajoie et Bednarz, 2014; Small, 2013; Van de Walle et Lovin, 2007). Le NCTM (2000, p. 52, traduction libre) la définit comme suit :

> *[...] un engagement dans une tâche pour laquelle la façon de la solutionner n'est pas connue à l'avance. Afin de trouver une solution, les élèves doivent s'appuyer sur leurs connaissances et souvent, grâce à ce processus, développent ou approfondissent leur compréhension mathématique.*

Cette définition comporte l'idée d'apprendre la mathématique PAR la résolution de problèmes.

8. Le terme « résolution de problèmes » renvoie ici à un contexte d'enseignement-apprentissage de la mathématique et non uniquement à la compétence Résoudre une situation-problème du Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ).

Small (2013) rapporte que la résolution de problèmes en mathématique a souvent été utilisée comme un point d'arrivée au terme d'une séquence d'enseignement, voire comme un moyen de transfert des apprentissages.

Pour optimiser l'apport de la résolution de problèmes, cette auteure avance qu'il serait encore plus avantageux de l'utiliser comme le moyen d'apprentissage de la mathématique. Le Programme de formation de l'école québécoise au secondaire (MEQ, 2006b, p. 231) va dans le même sens :

> *La résolution de situations-problèmes est au cœur des activités mathématiques comme de celles de la vie quotidienne. Elle est observée sous deux angles. D'une part, elle est considérée comme un processus, d'où la compétence Résoudre une situation-problème[9]. D'autre part, en tant que modalité pédagogique, elle soutient la plupart des démarches d'apprentissage de la discipline.*

Van de Walle et Lovin (2007, p. 10) précisent également que les élèves :

> *[...] doivent résoudre des problèmes, non pour mettre en pratique les notions mathématiques qu'ils possèdent déjà, mais pour en apprendre de nouvelles. Lorsqu'ils doivent résoudre des problèmes judicieusement choisis et se concentrer sur les méthodes de solution, il en résulte une nouvelle compréhension des concepts mathématiques intégrés dans la tâche.*

Dans cette perspective, le problème proposé devient un outil privilégié pour donner du sens aux concepts mathématiques enseignés (Sarrazy, 2008). Van de Walle et Lovin (2007, p. 10) rapportent d'ailleurs que « la résolution de problèmes est le meilleur moyen d'enseigner la plupart, sinon la totalité, des principales procédures et des principaux concepts mathématiques ».

> Apprendre la mathématique PAR la résolution de problèmes favorise le développement de la compréhension conceptuelle chez les élèves à travers des situations contextualisées.

Dans le *Fascicule K* (MEQ, 1988, p. 12), le terme « situation contextualisée » est défini de la manière suivante :

> *Un problème en mathématiques suppose au départ que l'on fasse référence à une situation donnée, c'est-à-dire à un contexte où il est question de certains objets ainsi que de certaines relations et opérations, explicitées ou non, faisant intervenir ces objets. La situation évoquée peut être de nature matérielle (personnes, objets d'utilité courante, blocs logiques, etc.), de nature abstraite (nombre, figures géométriques, objets imaginés, etc.) ou les deux à la fois.*

9. Dans le présent document, le terme « situation-problème » est considéré comme un synonyme de « problème ».

Le choix de problème et l’analyse a priori

Lorsque la résolution de problèmes est utilisée avec l’intention d’apprendre les concepts et les processus mathématiques, le choix du problème est particulièrement important. Il s’agit pour l’enseignant de choisir un problème dont la démarche de résolution n’est pas connue d’emblée par l’élève.

Conformément à la définition donnée de l’apprentissage de la mathématique PAR la résolution de problèmes, l’élève ne devrait pas non plus connaître tous les concepts et les processus mathématiques nécessaires à sa résolution. Cependant, il faut que le problème se situe dans la zone proximale de l’élève, c’est-à-dire que certains outils mathématiques qu’il possède lui permettent de le résoudre.

D’après le *Guide d’enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 6e année*, élaboré par le ministère de l’Éducation de l’Ontario (MEO, 2006, p. 28), un bon problème devrait posséder les caractéristiques suivantes :

- il est formulé clairement, sous forme d’un énoncé écrit, oral ou même illustré, de façon à être compris par tous les élèves;
- il est énoncé de façon à ne pas induire une stratégie de résolution ou l’emploi d’un algorithme en particulier;
- il éveille la curiosité et maintient l’intérêt des élèves;
- il incite à la réflexion et aux échanges mathématiques;
- il est à la portée de tous les élèves tout en leur offrant un défi;
- il se prête à l’utilisation d’une variété de stratégies de résolution;
- il fait appel au vécu des élèves;
- il donne lieu à une ou à plusieurs réponses correctes.

Une autre caractéristique d’un bon problème pour l’enseignement-apprentissage de la mathématique PAR la résolution de problèmes, documentée par plusieurs auteurs, est le fait qu’il puisse donner une rétroaction à l’élève (Brousseau, 1998; Charnay, Douaire, Valentin et Guillaume, 2005; Giroux, 2014). À ce sujet, Charnay et ses collaborateurs (2005, p. 82) mentionnent ce qui suit :

> *Ces situations sont souvent « auto-validantes » : au terme de sa procédure, l’enfant peut se rendre compte s’il a réussi ou non. Il est important que l’enfant comprenne que c’est à lui de dire si lui ou un autre enfant a résolu le problème proposé.*

Cette passation de la responsabilité de la résolution et de la validation du problème de l’enseignant à l’élève se nomme le principe de dévolution (Brousseau, 1998). C’est donc dire que le problème choisi doit susciter l’intérêt et l’adhésion de l’élève afin qu’il soit motivé à y trouver une solution (MEQ, 2006a).

Les deux exemples de problèmes qui suivent donnent en eux-mêmes une rétroaction à l’élève. Le premier offre une rétroaction très concrète. Si l’élève ne met pas en place une démarche juste, il réalise concrètement qu’il n’a pas respecté les contraintes du problème.

Le deuxième fournit une rétroaction plus abstraite. L’élève obtiendra une rétroaction en lien avec le sens des concepts et des processus mathématiques en jeu dans le problème.

EXEMPLE 7

Problème fournissant une rétroaction concrète à l'élève (tiré de Charnay et autres, 2005, p. 78)

On demande à des élèves du préscolaire de répartir 27 objets dans 7 enveloppes de manière que chaque enveloppe n'en compte pas moins de 3 et pas plus de 5. On constate que les premières procédures observées sont très diverses. Certains élèves distribuent les objets un par un, d'autres mettent le maximum d'objets dans les premières enveloppes et d'autres encore répartissent les objets en tas de 3. Dans cet exemple, les élèves ne prennent pas explicitement en compte toutes les contraintes du problème, car, si tous les objets sont répartis, le bon nombre d'enveloppes ou le bon nombre d'objets par enveloppe ne sont pas toujours respectés.

C'est donc dire que, lorsque les élèves tentent une procédure, par exemple, mettre le maximum d'objets permis, soit cinq, dans les premières enveloppes, ils se rendent compte que cela ne fonctionne pas. Pour deux enveloppes, la contrainte de contenir minimalement 3 objets n'est pas respectée.

EXEMPLE 8

Problème fournissant une rétroaction abstraite à l'élève

La tâche suivante est proposée à des élèves du début du troisième cycle du primaire.

Place entre les « 3 » un signe d'opération (+, -, ×, ÷) et des parenthèses pour obtenir une écriture correcte sur chaque ligne.

a.	3	3	3	3	=	2
b.	3	3	3	3	=	3
c.	3	3	3	3	=	4
d.	3	3	3	3	=	5
e.	3	3	3	3	=	6
f.	3	3	3	3	=	7
g.	3	3	3	3	=	8
h.	3	3	3	3	=	36

Ce problème montre aux élèves la nécessité d'avoir une priorité des opérations pour ne pas obtenir deux résultats différents pour un même calcul. Il s'agit d'un constat abstrait puisqu'il est directement en lien avec le concept mathématique à développer (priorité des opérations).

Le défi concernant la résolution de problèmes ne doit pas être de comprendre ce qu'on cherche dans le problème, c'est-à-dire que le contexte proposé ne doit pas constituer un frein à l'engagement de l'élève dans la résolution du problème. C'est pourquoi, lors d'un enseignement PAR la résolution de problèmes, l'enseignant s'assure que les élèves comprennent le problème proposé en leur demandant de résumer leur compréhension du contexte, notamment en le reformulant dans leurs mots.

Pour sa part, le *Fascicule K* (MEQ, 1988, p. 28) indique à ce sujet :

> *Il faut veiller à ce que les contextes des problèmes proposés aux élèves soient cohérents en soi et avec les apprentissages visés et qu'ils ne viennent pas dénaturer les notions mathématiques concernées.*

Le fait que les élèves de la classe aient un bagage mathématique et culturel hétérogène, tant sur le plan des concepts et des processus que sur celui des stratégies cognitives et métacognitives et du vocabulaire, exige que le déroulement de l'apprentissage par la résolution de problèmes soit rigoureusement planifié.

En effet, un problème bien choisi permettra d'atteindre la zone proximale de la majorité des élèves. Cependant, l'enseignant doit prévoir les actions qu'il posera pour aider les élèves pour lesquels la tâche est trop difficile ou trop facile. Pour ce faire, il peut effectuer une analyse a priori du problème qu'il propose. Selon Charnay (2003, p. 19), « l'analyse a priori constitue un des outils professionnels d'aide à la décision, en permettant d'anticiper certaines réactions d'élèves et donc d'orienter certains choix de l'enseignant ». Toujours selon Charnay (2003), cette analyse a priori permet à l'enseignant d'émettre des hypothèses sur :

- les démarches, les stratégies et les procédures que les élèves utiliseront;
- les obstacles qu'ils rencontreront et les erreurs que ceux-ci engendreront;
- l'organisation pédagogique qui favorisera l'apprentissage dans la classe (travail seul ou en équipe, matériel à fournir aux élèves, etc.);
- des interventions à mettre en place qui favoriseront l'apprentissage.

Concrètement, cette analyse a priori pourrait permettre à l'enseignant de prévoir des questions à poser à un élève qui serait « en panne » devant la tâche ou de proposer des actions supplémentaires à un autre qui aurait résolu le problème rapidement. L'enseignant pourrait également prévoir certains changements à apporter à la tâche tels que la modification de nombres ou du contexte. Des élèves pourraient ainsi établir des relations entre certaines données pour ensuite revenir au problème tel qu'il a été présenté initialement. Sans l'analyse a priori, la gestion pédagogique de la situation d'apprentissage peut se détériorer rapidement, par exemple, plusieurs élèves sont « en panne » devant la tâche, alors que d'autres dérangent leurs pairs parce qu'ils ont terminé, jusqu'au point où l'enseignant sera tenté de prendre les choses en main et d'enseigner la façon de résoudre la situation, ce qui n'est pas cohérent par rapport aux visées de l'apprentissage de la mathématique PAR la résolution de problèmes.

Les trois temps d'un enseignement PAR la résolution de problèmes

Lorsqu'un problème a été choisi par l'enseignant en fonction des caractéristiques énoncées précédemment et que l'analyse a priori a été effectuée, l'activité de résolution de problèmes peut être vécue en classe. Plusieurs auteurs se sont penchés sur le déroulement de cette activité et certains l'ont décrite selon trois temps d'enseignement distincts (Brousseau, 1998; MEO, 2006; Seeley, 2016) :

1. Les élèves explorent le problème et le résolvent seuls ou avec des pairs, c'est-à-dire qu'ils s'approprient le problème (principe de dévolution) en tentant d'analyser et de comprendre la situation présentée, en établissant les relations entre les données, en mobilisant et en appliquant des outils mathématiques (concepts, processus et stratégies) et en laissant des traces pour communiquer leur solution à l'oral ou à l'écrit.

À ce moment, l'enseignant les observe et peut répondre à des questions de clarification. Il s'appuie sur son analyse a priori pour poser des sous-questions à des élèves et leur permettre d'aller plus loin. Il peut également proposer à certains élèves des ajustements de manière à rendre le problème plus accessible pour eux en manipulant les variables didactiques [10].

2. En grand groupe, les élèves proposent différentes façons de résoudre le problème. L'enseignant joue alors un rôle de médiateur. Il les amène à comparer leurs solutions et à rendre explicites les ressemblances et les différences entre celles-ci. Il questionne également les élèves sur la certitude de leurs propos et provoque une confrontation saine d'idées entre eux pour les amener à cheminer dans leur propre compréhension des concepts en jeu.
3. Finalement, l'enseignant formalise les apprentissages qui ont été effectués par la résolution du problème, c'est-à-dire qu'il rend explicites les apprentissages mathématiques. La connaissance acquise pourra alors servir d'outil pour la résolution de nouveaux problèmes.

D'un point de vue théorique, cette séquence d'enseignement en trois temps est appuyée par une étude menée par DeCaro et Rittle-Johnson (2012) qui leur a permis de conclure qu'une phase de découverte préparait mieux les élèves à la formalisation de la compréhension des concepts qu'un enseignement de ceux-ci suivi de la résolution d'un problème faisant appel à ces concepts. Elle a également été proposée plus ou moins explicitement par quelques auteurs et avec une terminologie parfois très différente de l'un à l'autre.

Par exemple, Seeley (2016, p. 4) recommande d'utiliser la forme « TU, NOUS, JE » pour l'apprentissage de la mathématique :

> *TU vas tenter de comprendre et de solutionner un problème, même si c'est quelque chose que tu ne connais pas, NOUS allons parler de ta réflexion et de tes essais, et JE, comme enseignant, vais m'assurer que tu comprennes les mathématiques [...].*

De son côté, dans sa théorie des situations didactiques, Brousseau (1998) mentionne qu'au cours d'une phase de dévolution, l'enseignant confie d'abord à l'élève la responsabilité et le pouvoir de résoudre la situation. L'élève est par la suite invité à trouver une solution en interaction avec ses pairs. Le processus se termine par une phase d'institutionnalisation où l'enseignant formalise les apprentissages effectués.

Pour sa part, le MEO (2006) propose trois temps pour la résolution de problèmes : la mise en train, l'exploration en groupe et l'objectivation des apprentissages.

10. Brousseau (1998) définit les variables didactiques comme étant des paramètres sur lesquels l'enseignant peut intervenir pour complexifier ou simplifier le problème (taille des nombres, nature des nombres, contraintes, contexte, etc.).

Enseignement-apprentissage de la mathématique POUR la résolution de problèmes

Bien que la résolution de problèmes soit un contexte d'enseignement-apprentissage essentiel à la mathématique, plusieurs recherches mentionnent qu'elle est également un contexte à privilégier pour mobiliser et appliquer des concepts en situation contextualisée (MEQ, 1988; Small, 2013). On parle alors de l'enseignement-apprentissage de la mathématique POUR la résolution de problèmes. Ce contexte d'enseignement-apprentissage est d'ailleurs souvent exploité dans les écoles québécoises pour soutenir le développement des compétences mathématiques prescrites par le PFEQ (*Résoudre une situation-problème et Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ou Déployer un raisonnement mathématique*).

Le fait d'enseigner et de faire apprendre la mathématique POUR la résolution de problèmes permet à l'élève de consolider sa compréhension conceptuelle, sa flexibilité et sa fluidité.

> Comme enseignant, il faut être conscient que le fait d'enseigner des concepts puis de résoudre des problèmes pour les mobiliser, tout de suite après l'apprentissage, peut générer chez l'élève la croyance qu'il faut toujours utiliser les derniers concepts travaillés en classe pour résoudre des problèmes.

EXEMPLE 9

Apprendre la mathématique POUR résoudre des problèmes

On propose la tâche suivante aux élèves après avoir construit le sens du concept de moyenne.

La moyenne des élèves de M. Tremblay est de 72 % selon la dernière évaluation en mathématique. M. Tremblay s'est toutefois rendu compte qu'il avait oublié d'inclure la note de Frédéric (68 %) et celle de Maude (76 %) dans son calcul de la moyenne du groupe. Quelle sera la moyenne du groupe s'il inclut les notes de Frédéric et de Maude?

Pour exécuter cette tâche, on ne peut se rabattre exclusivement sur l'application de l'algorithme de calcul de la moyenne. Il faut plutôt mobiliser la compréhension du concept de moyenne.

Il est important de mentionner ici que les problèmes proposés dans un contexte d'apprentissage de la mathématique POUR la résolution de problèmes doivent également présenter un défi pour l'élève. En ce sens, l'élève ne doit pas pouvoir déterminer d'emblée le chemin à parcourir pour en arriver à la solution. Dans le cas contraire, on parlera davantage d'exerciseurs que de problèmes (MEQ, 1988, MEQ, 2006a).

Actuellement, cette deuxième intention de l'utilisation de la résolution de problèmes est la plus courante dans les classes au Québec. Elle a assurément son importance, mais un meilleur dosage entre les trois intentions serait souhaitable pour maximiser l'apport de la résolution de problèmes dans l'enseignement-apprentissage de la mathématique.

Résoudre des problèmes pour apprendre à résoudre des problèmes

En plus de l'apprentissage de la mathématique PAR la résolution de problèmes et POUR la résolution de problèmes, les chercheurs du champ relatif à l'enseignement de cette discipline (mathematics education) s'intéressent également au processus de résolution de problèmes ainsi qu'aux stratégies cognitives et métacognitives qu'il implique (Verschaffel et De Corte, 2008; Montague, Warger et Morgan, 2000; Focant et Grégoire, 2008; Allsopp, Kyger et Lovin, 2007). Ces chercheurs reconnaissent l'apport de la résolution de problèmes au développement et à la consolidation de la compréhension en mathématique. Ils s'intéressent également à l'enseignement-apprentissage de stratégies cognitives et métacognitives POUR apprendre à résoudre des problèmes[11].

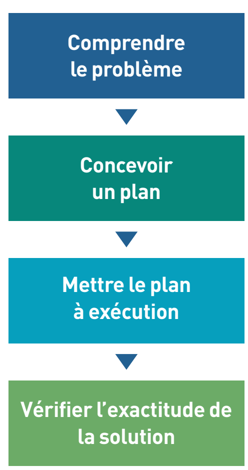
Les heuristiques de résolution de problèmes

Depuis plus de cinquante ans, un très grand nombre d'auteurs ont tenté de décrire et de schématiser le processus cognitif qui permet de résoudre des problèmes. La description et la schématisation de ce processus constituent une heuristique de résolution de problèmes. À ce sujet, le PFEQ (2006c, p.19) mentionne que :

> *La résolution de situations-problèmes, qui constitue l'un des fondements de l'activité mathématique, repose sur une démarche heuristique, c'est-à-dire axée sur l'exploration et la découverte. Elle permet de construire des objets mathématiques, de leur donner du sens, de mobiliser des savoirs connus, de développer des stratégies et de mettre en œuvre diverses attitudes liées notamment à la confiance en soi et à l'autonomie.*

Pólya (1945) est reconnu comme étant le premier à avoir produit une heuristique de résolution de problèmes qui est présentée dans la figure suivante.

Figure 3 Heuristique de résolution de problèmes de Pólya (1945)



11. C'est d'ailleurs dans ce dernier courant qu'ont été développées les aides méthodologiques ou heuristiques en lien avec le processus de résolution de problèmes. On peut penser, entre autres, au modèle de Polya (1945), qui est l'un des premiers à s'être intéressés à ce sujet. Verschaffel et De Corte (2008) de même que Poirier (2001) ont également proposé des modèles en lien avec le processus de résolution de problèmes.

L'heuristique de Pólya (1945) comprend quatre étapes : comprendre le problème, concevoir un plan, mettre le plan à exécution et vérifier l'exactitude de la solution. Lors de la première étape, l'élève essaie de cibler ce qu'il cherche et de déterminer ce qu'il sait à partir des données du problème.

Pour ce faire, il peut dessiner un schéma représentant le problème, écrire sur papier les données qu'il contient ou transposer ces données en notation mathématique. Lors de la deuxième étape, l'élève tente d'établir un lien entre les données du problème et l'inconnu. Pour ce faire, il peut se demander s'il a déjà fait un problème de ce type et si la démarche suivie pourrait être réutilisée. Il peut aussi tenter de reformuler le problème.

Ces étapes permettent à l'élève de bâtir un plan d'action pour obtenir la solution. À la troisième étape, l'élève utilise ses outils mathématiques et résout le problème. Enfin, à la quatrième étape, il vérifie sa solution et l'analyse pour déterminer si elle peut être réinvestie pour d'autres types de problèmes. La schématisation de cette heuristique peut laisser croire à une démarche linéaire, mais Pólya lui-même mentionnait que des allers-retours entre les différentes étapes sont souvent nécessaires.

Au fil du temps, d'autres auteurs ont repris les grandes lignes de l'heuristique de Pólya (1945) et l'ont améliorée. On peut notamment penser aux heuristiques produites par Verschaffel, Greer et De Corte (2000) ainsi que Poirier (2001), qui sont présentées dans les figures suivantes.

Figure 4 **Heuristique de résolution de problèmes de Verschaffel, Greer et De Corte (2000), tirée de Fagnant, Demonty et Lejong (2003)**

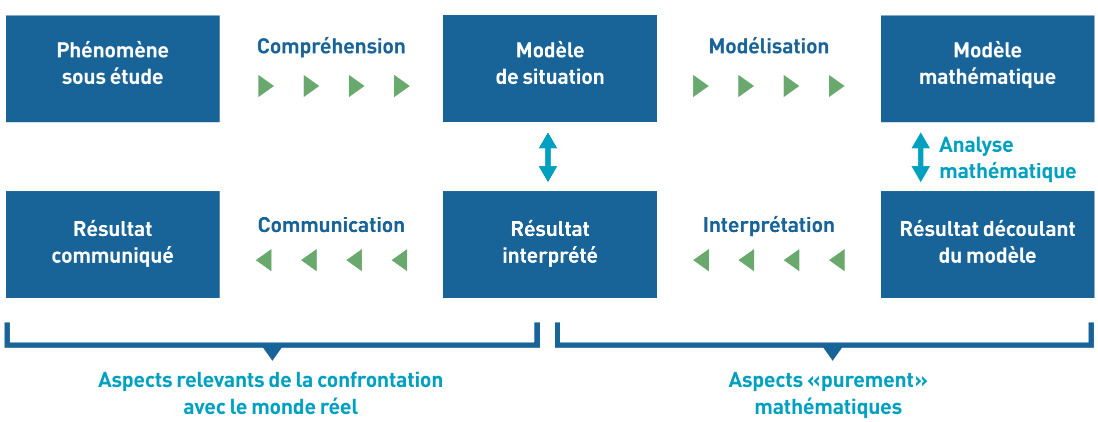
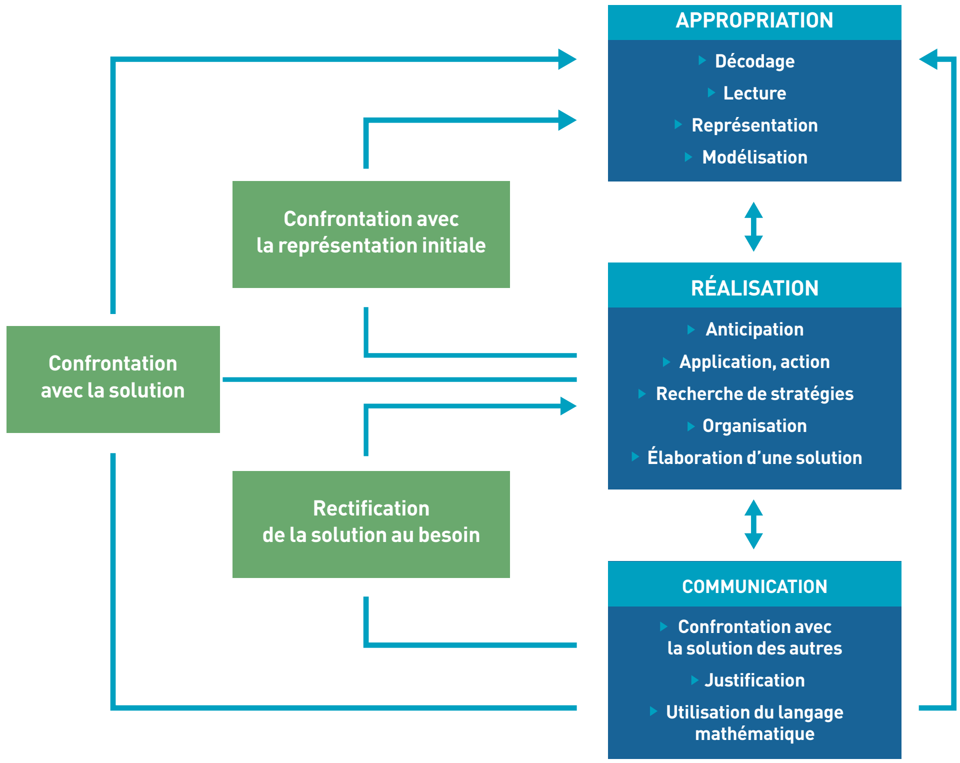


Figure 5 Heuristique de résolution de problèmes de Poirier (2001)



Les heuristiques de Verschaffel, de Greer et de De Corte (2000) ainsi que de Poirier (2001) mettent en lumière un processus de résolution de problèmes dynamique et itératif impliquant les actions suivantes : l'analyse et la compréhension du problème, le choix d'outils mathématiques appropriés, l'utilisation adéquate de ces outils, la régulation de la solution obtenue en fonction de l'analyse et de la compréhension du problème de même que la communication orale ou écrite de la solution.

Il est possible d'établir un rapprochement entre les actions proposées par ces heuristiques et les compétences, *Résoudre une situation-problème* et *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* ou *Déployer un raisonnement mathématique*, prescrites dans le PFEQ au primaire et au secondaire. Plus précisément, les critères d'évaluation et les manifestations observables y étant associés présentés dans les cadres d'évaluation des apprentissages du primaire et du secondaire pour les mathématiques (MELS, 2011a, MELS 2011b) reprennent plusieurs des grandes actions de ces heuristiques.

Toutefois, les heuristiques ne doivent pas être enseignées aux élèves comme des démarches de résolution de problèmes à suivre étape par étape, comme l’indique le *Fascicule K* (MEQ, 1988, p. 50) :

> ***Obliger les élèves à employer systématiquement de tels modèles*** *[heuristiques] pour résoudre n’importe quel problème ou pour laisser des traces écrites de leur démarche* ***peut mener à des absurdités et à une véritable déformation du sens de l’activité de résolution de problèmes en mathématiques****; en effet, le développement de l’habileté à résoudre des problèmes ne saurait se réduire à l’apprentissage d’une technique qu’il suffirait d’appliquer un peu à la manière d’un algorithme.*

Il s’agit plutôt d’enseigner aux élèves des stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes.

Le développement de stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes

D’entrée de jeu, mentionnons qu’une stratégie cognitive devient métacognitive à partir du moment où l’élève prend conscience qu’il l’utilise. Un regard sera donc particulièrement porté dans cette section sur les stratégies métacognitives puisqu’elles englobent les stratégies cognitives. De plus, selon le PFEQ (MEQ, 2006c), le développement de ces stratégies accompagne le développement des compétences mathématiques et est intégré au processus d’apprentissage.

Il s’avère important d’apporter d’abord quelques précisions sur le concept de métacognition afin de voir comment il peut se traduire en stratégies au service de la résolution de problèmes. Selon Flavell (1976), la métacognition renvoie à deux dimensions.

La première dimension de la métacognition concerne les connaissances qu’a une personne concernant ses propres processus cognitifs ainsi que ce qui aide ou entrave ces processus. Par exemple, un élève se dit bon en calcul mental en raison du fait qu’il observe et reconnaît rapidement les relations entre les nombres et peut ainsi opérer astucieusement pour trouver un résultat.

La seconde dimension de la métacognition concerne le pouvoir de la personne sur ses processus cognitifs ainsi que sur la régulation et la gestion de ceux-ci lors de la résolution d’un problème. Cette dimension de la métacognition a été étudiée par plusieurs auteurs pour le cas particulier de l’apprentissage de la mathématique (Balacheff, 1987; Focant et Grégoire, 2008; Schoenfeld, 1985; Schoenfeld, 1992). Focant et Grégoire (2008, p. 204) appellent cette dimension l’autorégulation cognitive et précisent qu’elle « porte sur la capacité de l’individu de planifier et de contrôler délibérément ses propres processus cognitifs en vue de la réalisation d’un but ou d’un objectif déterminé ». Ces auteurs affirment que quatre stratégies majeures d’autorégulation cognitive sont à développer en lien avec ce concept : la détermination du but, la planification, le contrôle et la régulation.

- La détermination du but consiste à déterminer ce qui est à faire, le point d’aboutissement, l’état final recherché lors de l’accomplissement d’une tâche. Cette stratégie est fondamentale, car elle servira de point de référence et elle permettra d’évaluer et de guider les actions à mettre en œuvre tout au long de l’exécution de la tâche en vue d’atteindre le but poursuivi.

- La planification consiste à élaborer un plan des actions à effectuer pour atteindre le but poursuivi par la tâche. Il s'agit pour l'élève, dans un premier temps, d'envisager des scénarios ou des plans d'action susceptibles de mener vers une solution satisfaisante puis, dans un second temps, de déterminer et d'appliquer celui qui est le plus approprié et le plus efficace.
- Le contrôle permet à l'élève de surveiller et d'évaluer le cours des travaux qu'il effectue et les résultats qu'il obtient à l'égard du but poursuivi. Il s'agit en fait d'un contrôle qui repose sur une réflexion dans l'action. Il servira à l'élève de point de référence pour l'adaptation de ses actions en vue de l'atteinte du but poursuivi par la tâche.
- La régulation a pour objectif d'utiliser les informations recueillies à l'aide des quatre stratégies pour adapter et ajuster les actions nécessaires pour atteindre le but poursuivi par la tâche.

Un élève qui utilise une ou plusieurs de ces stratégies effectue les actions suivantes :

- il cherche à déterminer le but de la tâche :
  - qu'est-ce que la tâche demande de faire?
  - qu'elle est la mission de la tâche?
- il planifie les actions à poser pour atteindre ce but;
- il s'interroge sur la pertinence de ses choix :
  - est-ce que son raisonnement est approprié en fonction du but à atteindre?
  - est-ce que les concepts et processus qu'il choisit lui permettront de trouver un résultat approprié en fonction de ce but?
  - est-ce que ses décisions font sens et tiennent la route?
- il est en mesure de vérifier les actions posées en lien avec le but de la tâche;
- il est en mesure de valider sa démarche :
  - est-ce qu'il y a des erreurs ou des oublis?
- il est en mesure de valider le résultat obtenu et l'adéquation avec le but poursuivi par la tâche :
  - est-ce que son résultat est sensé?
  - est-il complet?

Les progressions des apprentissages en mathématique au primaire et au secondaire (MELS, 2009; MELS 2010) proposent des stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes. Elles proposent également des questions que l'élève peut se poser pour mettre en œuvre les différentes stratégies. Par exemple, lorsque l'élève cherche et détermine le but de la tâche, il peut se poser des questions telles que :

- quelle tâche dois-je accomplir?
- quel est le but de la question?
- quelles connaissances antérieures dois-je mobiliser?
- etc.

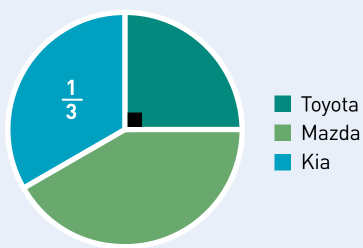
Plusieurs études rapportent qu'un enseignement explicite de ces stratégies métacognitives est efficace, particulièrement pour les élèves qui éprouvent des difficultés (Bissonnette, Richard, Gauthier et Bouchard, 2010; Montague, 2006; Montague, Warger et Morgan, 2000). Cet enseignement se traduit par un modelage de ces stratégies par l'enseignant, comme s'il plaçait un haut-parleur sur sa pensée. Ensuite, les élèves sont amenés à les utiliser en contexte de résolution de problèmes sous la supervision de l'enseignant. Il s'agit de l'étape de pratique guidée. Finalement, les élèves utilisent ces stratégies efficacement de façon autonome dans différents contextes (MELS, 2009). Celles-ci seront particulièrement aidantes pour ceux qui, devant un problème, prennent peu le temps de réfléchir et effectuent rapidement des actions qui ont peu de sens dans le contexte du problème, par exemple, additionner toutes les données.

L'exemple suivant présente un problème visant à travailler la stratégie cognitive qui consiste à établir des relations entre les données pour générer de nouvelles données (stratégie de planification).

EXEMPLE 10

Le parc automobile

Recension des 120 voitures usagées d'un parc automobile



Prix de vente par voiture:

Kia: 3 500 $
Toyota : 8 000 $

Si chaque voiture de marque Mazda coûte 75 % du prix de vente d'une voiture de marque Toyota, quelle est la valeur des voitures de marque Mazda qui composent le parc automobile?

L'enseignant utilise ce problème pour faire apprendre une ou des stratégies cognitives ou métacognitives aux élèves sans porter une attention particulière au résultat à atteindre et aux solutions propres au problème.

Dans ce problème, les élèves sont amenés à constater que le résultat de 75 % doit être mis en relation avec le prix d'une voiture Toyota pour générer une nouvelle donnée qui sera utilisée pour la solution. À partir de ce constat spécifique au problème, un constat plus général est établi, soit qu'il existe des relations entre les données, ce qui génère de nouvelles données nécessaires pouvant permettre de résoudre un problème. Ce constat plus général devient une stratégie métacognitive utile pour résoudre des problèmes.

Certains chercheurs venant majoritairement du champ de la didactique de la mathématique ont émis de vives critiques à l'égard de la psychologie cognitive et du fait de résoudre des problèmes POUR apprendre à résoudre des problèmes (Sarrazy, 1997). En effet, Mercier (2008) et Sarrazy (1997) ont exprimé leur crainte d'une « démathématisation » de l'enseignement, au sens où l'activité de résolution de problèmes deviendrait une activité pour elle-même (résoudre pour résoudre ou apprendre à résoudre).

Dans le même sens, Houle et Giroux (2016), s'appuyant sur les propos de Brousseau (1998), vont plus loin et précisent que le fait d'apprendre à l'élève une démarche de résolution de problèmes pourrait conduire à une « déresponsabilisation du contrôle du travail intellectuel de l'élève, c'est-à-dire qu'au lieu de s'engager dans la recherche d'une solution au problème, il chercherait à respecter la méthode qui lui a été enseignée ».

Selon plusieurs auteurs, l'enseignement de ces stratégies peut amener l'élève à exécuter une série d'étapes en ne réfléchissant pas aux enjeux mathématiques présents dans le problème. L'étude de Goulet (2018) montre en effet que c'est souvent ce qui se produit. **Une attention particulière doit donc être portée à l'enseignement de ces stratégies pour qu'elles outillent les élèves en ce qui a trait à la réflexion et à la façon de s'y prendre pour résoudre le problème, tout en s'assurant qu'ils demeurent centrés sur les enjeux mathématiques. Il ne faut donc pas confondre l'enseignement de stratégies métacognitives au service de la résolution de problèmes et l'enseignement d'une démarche séquentielle à utiliser systématiquement pour tous les problèmes.**

La résolution de problèmes ne peut se résumer à un enseignement de stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes. Bien que les élèves puissent bénéficier de l'apprentissage de ces stratégies, cela ne suffit pas à les amener à pouvoir mobiliser les bons concepts mathématiques en contexte de résolution de problèmes et à établir des liens entre eux. En tant qu'enseignant, il importe d'abord de s'assurer de proposer aux élèves un problème qui fera évoluer leurs connaissances mathématiques. Pour ce faire, il faut pouvoir déterminer où en sont les connaissances mathématiques des élèves afin de leur proposer un problème qui permettra de partir de ces connaissances pour les faire évoluer.

Tableau 3 Les trois intentions de la résolution de problèmes

Intention	Description
Apprendre la mathématique PAR la résolution de problèmes	La résolution de problèmes est une modalité pédagogique qui permet d'apprendre les concepts et processus mathématiques.
Apprendre la mathématique POUR résoudre des problèmes	La résolution de problèmes est utilisée pour mobiliser et appliquer les concepts et processus mathématiques en situation contextualisée.
Résoudre des problèmes pour apprendre à résoudre des problèmes.	La résolution de problèmes devient un contexte pour l'enseignement et l'apprentissage de stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes.

En résumé, trois intentions distinctes de la résolution de problèmes sont présentées dans la littérature sur le sujet : apprendre la mathématique PAR la résolution de problèmes, apprendre la mathématique POUR résoudre des problèmes et résoudre des problèmes POUR APPRENDRE À RÉSOUDRE des problèmes.

L'apprentissage de la mathématique PAR la résolution de problèmes se fait à l'aide de problèmes pour lesquels l'élève ne possède pas tous les outils mathématiques. Ce sont plutôt ces problèmes qui lui donnent une rétroaction quant à la nécessité de posséder des outils plus adaptés ou d'en construire de nouveaux.

L'apprentissage de la mathématique POUR la résolution de problèmes se fait au moyen de problèmes pour lesquels l'élève devra mobiliser des outils mathématiques qu'il possède déjà. Cela lui permettra de consolider sa compréhension conceptuelle, sa flexibilité et sa fluidité.

Finalement, résoudre des problèmes POUR APPRENDRE À RÉSOUDRE des problèmes fait référence à l'enseignement-apprentissage de stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes.

Une condition essentielle à l'actualisation des fondements de l'enseignement-apprentissage de la mathématique

L'engagement cognitif et la participation active de l'élève constituent une condition essentielle à l'enseignement-apprentissage de la mathématique. En effet, pour soutenir la construction de ses apprentissages, l'élève est amené à prendre des risques, à explorer, à faire des essais et des erreurs, à réfléchir, à se questionner, à partager et à justifier son raisonnement, à le confronter à celui des autres, à émettre des conjectures et à les valider, etc. Cette participation active de l'élève est difficilement possible dans un contexte où l'enseignant détient à lui seul le savoir mathématique et où priment l'exercisation individuelle axée sur l'automatisation de procédures et l'exactitude des résultats (Houle et Giroux, 2016).

L'enseignant doit donc **mettre en place un climat de classe propice à l'engagement cognitif et à la participation active de l'élève.** Cela peut se faire notamment par une attitude positive de sa part à l'égard de la mathématique et en considérant l'erreur comme un levier pour l'apprentissage. De plus, un choix judicieux de problèmes est important pour assurer cet engagement cognitif et cette participation active de l'élève.

Cette deuxième section permettra de définir les manifestations de l'engagement cognitif et de la participation active de l'élève en classe de mathématique, notamment lorsqu'il raisonne et communique. Elle présentera également des éléments liés au climat de classe à instaurer par l'enseignant pour favoriser cet engagement cognitif et cette participation active de l'élève. Il s'agit de faire de la classe une communauté d'apprenants, d'adopter une attitude positive à l'égard de la mathématique, de considérer l'erreur comme un levier pour l'apprentissage et d'expliquer à l'élève son rôle et celui de l'enseignant durant l'enseignement-apprentissage de la mathématique.

Favoriser l'engagement cognitif et la participation active de l'élève dans l'activité mathématique

Jusqu'à présent, deux fondements de l'activité mathématique ont été présentés. Il s'agit d'accorder une place prépondérante à l'enseignement de la compréhension conceptuelle et d'utiliser la résolution de problèmes selon différentes intentions. Pour que ces fondements puissent s'actualiser en classe, il s'avère primordial que l'enseignant favorise un engagement cognitif et une participation active des élèves (De Corte et Verschaffel, 2008; Forbringer et Fuchs, 2014; Van de Walle et Lovin , 2007; MELS, 2012a; MEO, 2006; MEQ, 2006b; Small, 2013).

À ce sujet, De Corte et Verschaffel (2008, p. 26) indiquent ce qui suit :

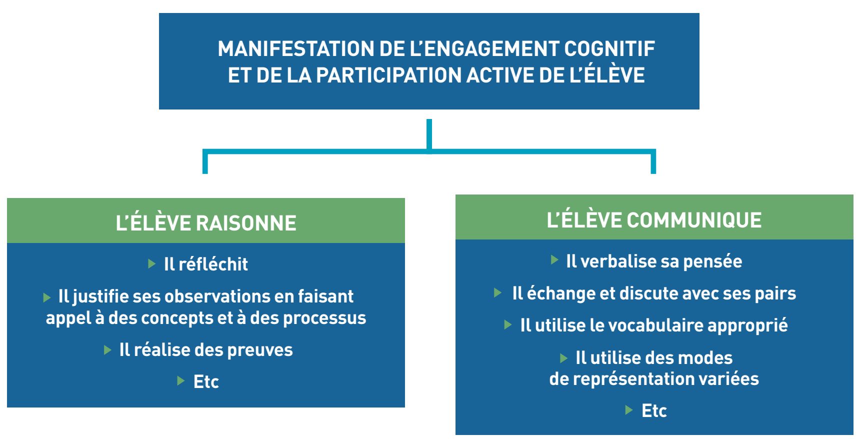
> *Cette révolution dans la conception des mathématiques va de pair avec une transformation fondamentale en ce qui concerne le processus d'apprentissage. Abandonnant l'idée d'une absorption passive et décontextualisée des connaissances et des compétences mathématiques institutionnalisées par l'œuvre des générations précédentes, on considère l'apprentissage des mathématiques comme la construction active [...] de significations et de compréhensions basées sur la modélisation de la réalité.*

En faisant une recension de la littérature sur l'engagement cognitif et la participation active de l'élève dans l'activité mathématique, on constate un ensemble de manifestations pouvant être rattachées à cette idée. Ces manifestations peuvent être regroupées selon deux aspects. Ainsi, l'élève est engagé cognitivement dans l'activité mathématique et y participe activement lorsqu'il :

- raisonne;
- communique.

La figure suivante présente une synthèse des manifestations de l'engagement cognitif et de la participation active de l'élève dans l'activité mathématique. Chacun des aspects sera expliqué dans cette section.

Figure 6 **Manifestations de l'engagement cognitif et de la participation active de l'élève dans l'activité mathématique**[12]



12. Figure élaborée à partir des manifestions de l'engagement cognitif et de la participation active dans l'activité mathématique, recensées parmi les auteurs suivants : Hiebert, Carpenter, Fenema, Fuson, Wearne, Murray, Oliver et Human, 1997; Jayanthi et Gersten, 2011; Pierce et Fontaine, 2009; Small, 2013; Van de Walle et Lovin, 2007; Verschaffel et De Corte, 2008; Villani et Torossian, 2018.

L'élève raisonne

Comme le précise le PFEQ pour le primaire (MEQ, 2006a, p. 124) « raisonner en mathématique consiste à établir des relations, à les combiner entre elles et à les soumettre à diverses opérations pour créer de nouveaux concepts et pousser plus loin l'exercice de la pensée mathématique ». La mise en place de pratiques pédagogiques promouvant la recherche de solutions à une variété de problèmes ainsi que l'animation de discussions en vue du partage de solutions et de stratégies avec et entre les élèves sont à privilégier. Ces pratiques sont à préconiser puisqu'elles vont au-delà de la transmission de procédures et de connaissances à mémoriser. Bien que ce dernier type d'enseignement puisse avoir sa place à certains moments dans l'apprentissage, une approche suscitant l'engagement cognitif et la participation active de l'élève dans ses apprentissages est à privilégier (MEO, 2006).

Susciter la réflexion de l'élève

D'abord, l'enseignant doit susciter la réflexion chez l'élève par des problèmes qui, dans la mesure du possible, présentent un contexte signifiant pour lui. Comme il a déjà été mentionné, des problèmes ayant un contexte signifiant et étant situés dans la zone proximale de développement des concepts mathématiques de l'élève l'amèneront à s'engager cognitivement. De plus, la réflexion de l'élève peut être suscitée par des questions de l'enseignant (MEO, 2011a). Ces questions peuvent être de différentes natures et avoir diverses intentions, par exemple :

- des questions planifiées en fonction d'une anticipation des raisonnements possibles des élèves à l'égard d'une tâche ou d'un problème donnés;
- des questions ouvertes;
- des questions sollicitant les interactions entre pairs;
- des questions favorisant l'établissement de liens;
- des questions permettant aux élèves de présenter leur solution, leur choix et leurs décisions;
- des questions permettant de faire des prédictions.

Les questions ouvertes ne sont pas toutes de même nature. Par exemple, un enseignant peut demander à l'élève d'expliquer comment il s'y est pris pour résoudre le problème proposé. Ce type de question touche principalement le processus de l'élève. Des questions ouvertes peuvent aussi être axées davantage sur les concepts mathématiques. Par exemple, pour un problème impliquant le concept d'aire, on peut demander à l'élève ce qui se produit avec l'aire d'un carré lorsqu'on double la mesure de ses côtés. Ce dernier type de question est particulièrement puissant pour le développement de la compréhension conceptuelle, puisqu'il amène l'élève à créer des liens entre les éléments d'un concept et entre des concepts.

Pour ce qui est des interactions entre pairs, Chapin, O'connor et Anderson (2013) ont relevé certains types de questions plus précises qui permettent d'optimiser ces interactions. Par exemple, l'enseignant peut demander à un élève de répéter dans ses mots les propos d'un autre élève ou de compléter des propos rapportés.

L'enseignant peut également susciter la réflexion de l'élève en manipulant les variables didactiques du problème proposé. Brousseau (1998) définit les variables didactiques comme étant des paramètres au regard desquels l'enseignant peut intervenir afin que le problème permette à l'élève d'acquérir certaines connaissances, comme la taille des nombres, la nature des nombres, les contraintes, le contexte, etc. Ces manipulations servent à doser la complexité du problème pour prendre en compte le bagage mathématique de l'élève. Elles peuvent donc simplifier ou complexifier le problème.

L'exemple qui suit présente la manipulation d'une variable didactique (choix des nombres) à l'aide d'un questionnement planifié ayant pour objectif de complexifier le problème pour faire progresser l'élève dans sa compréhension conceptuelle des nombres décimaux.

Dans cet exemple, les nombres sont choisis dans le but de créer une rupture de sens qui fera progresser l'élève. Lorsque ce dernier effectue l'opération « 4,2 + 9,1 » et qu'il obtient 13,3 comme résultat, il pourrait croire que l'addition de nombres décimaux implique l'addition des nombres situés avant et après la virgule de façon isolée. Ainsi, en demandant à l'élève d'effectuer l'opération « 4,2 + 9,9 » (où l'échange est sollicité), l'enseignant pourra vérifier s'il comprend bien la valeur de position des chiffres dans un nombre décimal. Peu importe le résultat obtenu par l'élève, l'enseignant lui demandera de justifier sa réponse.

EXEMPLE 11

La manipulation d'une variable didactique effectuée en vue de simplifier un problème

Jérémie travaille comme camelot et reçoit 1,40 $ chaque fois qu'il distribue 10 journaux. Combien d'argent recevra-t-il s'il distribue 85 journaux?

L'enseignant peut effectuer les interventions qui suivent pour faire cheminer un élève « en panne » devant la tâche.

- « Peux-tu essayer de résoudre le problème en considérant que Jérémie distribue 90 journaux? ». Avec cette intervention, on conserve les nombres décimaux, mais le nombre total de journaux distribués est un multiple de 10.
- « Je vois que tu sembles avoir de la difficulté avec le montant de 1,40 $. Peux-tu essayer de résoudre le problème en considérant que Jérémie gagne 2 $ pour 10 journaux distribués? ». Avec cette intervention, le problème ne comprend plus de nombre décimaux.

Afin de susciter la réflexion des élèves, il s'avère important que l'enseignant leur alloue un temps de réflexion suffisant (MEO, 2011a). Le raisonnement implique un temps de réflexion variable selon l'ampleur de la tâche ou la teneur de la question posée.

Inciter l'élève à justifier ses propos

Tout au long de son parcours scolaire en mathématique, l'élève est incité à justifier ses propos en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques. Il s'agit d'ailleurs d'une composante de la compétence *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques*, prescrite par le PFEQ au primaire (MEQ, 2006a). Au secondaire, cette idée de justification évoluera et l'élève devra établir des conjectures[13] pour ultimement réaliser des preuves[14] (MEQ, 2006b). L'exemple qui suit porte sur l'évolution de la justification, à l'aide de concepts et de processus mathématiques, vers l'établissement d'une conjecture, ce qui permet d'en arriver à une preuve.

13. Le terme conjecture désigne un énoncé que l'on pense vrai. Le verbe conjecturer signifie « pressentir la vérité d'un énoncé et chercher à montrer qu'il est vrai » (MEQ, 2006b, p.237)

14. Lorsqu'il déploie un raisonnement mathématique, l'élève dégage des lois et des propriétés en observant des régularités et les met en relation avec des concepts et des processus qui lui serviront à justifier des actions. Au fur et à mesure que le besoin de convaincre ou de prouver se fait sentir, il élabore plusieurs étapes pour conduire son raisonnement. Il apprend à mieux l'expliciter et le structurer et à raffiner son argumentation. L'idée de preuve évolue ainsi graduellement vers la construction d'une démonstration rigoureuse (MEQ, 2006c, p.33)

EXEMPLE 12

L'évolution de la justification

Dans un premier temps, on peut demander aux élèves de trouver le prix total d'un chandail coûtant 55,00 $, auquel on applique une taxe de 15 %. Les élèves doivent faire appel à leur compréhension conceptuelle et à leur flexibilité par rapport aux concepts de pourcentage et de fraction pour résoudre ce problème. Ils peuvent trouver la réponse de plusieurs façons.

Entre autres, ils peuvent dire que 15 % de 55 = 10 % de 55 + 5 % de 55.

Ils obtiennent alors 5,50 $ + $\left(\frac{5{,}50\ \$}{2}\right)$ (5 % est la moitié de 10 %), ce qui donne 5,50 $ + 2,75 $ = 8,25 $.

Ensuite, les élèves ajoutent 8,25 $ au prix du chandail, qui est de 55,00 $, ce qui donne 63,25 $.

Ils ont donc utilisé des concepts et des processus mathématiques pour justifier le fait qu'un chandail valant 55,00 $ coûte 63,25 $ avec la taxe.

Dans un deuxième temps, on peut demander aux élèves s'il est plus avantageux d'appliquer un rabais de 10 % avant ou après la taxe de 15 %. Certains supposeront qu'il est plus avantageux de le faire après la taxe, car le rabais de 10 % sera appliqué à un montant plus élevé. D'autres répondront qu'il est préférable de le faire avant la taxe, car cette dernière sera prélevée sur un montant moins élevé. Finalement, d'autres affirmeront que cela n'a pas d'incidence sur le prix final puisqu'un rabais appliqué à un montant plus élevé équivaut à une taxe prélevée sur un montant moins élevé. Par la suite, les élèves tenteront, à l'aide d'exemples, de vérifier laquelle des suppositions est la bonne (ex. : comparer le résultat obtenu lorsqu'on calcule un rabais de 10 % pour un article coûtant 80,00 $ avant l'application de la taxe et le résultat obtenu lorsqu'on le fait après). Ces exemples devraient leur permettre d'émettre la conjecture suivante : calculer un rabais avant ou après l'application de la taxe n'a pas d'incidence sur le prix final.

Enfin, on peut demander aux élèves de faire la preuve de l'affirmation suivante : il n'existe aucune différence, pour le consommateur, entre la prise en compte d'un rabais de 10 % avant l'application de la taxe et la prise en compte de ce rabais après l'application de la taxe. Les élèves pourront alors utiliser une preuve algébrique :

$$x - \left(\frac{10}{100}\right)x + \frac{15}{100}\left(x - \left(\frac{10}{100}\right)x\right) = 0{,}9x + \frac{15}{100}(0{,}9x) = 0{,}9x + 0{,}135x = 1{,}035x$$

$$x + \left(\frac{15}{100}\right)x - \frac{10}{100}\left(x + \left(\frac{15}{100}\right)x\right) = 1{,}15x - \frac{10}{100}(1{,}15x) = 1{,}15x - 0{,}115x = 1{,}035x$$

On obtient donc le même résultat pour tout x si l'on applique un rabais de 10 % avant ou après la taxe. L'élève pourra, par la suite, faire la démonstration de l'énoncé pour tout pourcentage de rabais et de taxe.

L'élève communique

Comme le mentionne le PFEQ (MEQ, 2006c, p.2) :

> *Le langage étant le véhicule de la pensée, la compétence Communiquer à l'aide du langage mathématique est essentielle à la compréhension et à la conceptualisation des objets mathématiques.*

Communiquer en mathématique, c'est bien plus que connaître et utiliser le vocabulaire spécifique de cette discipline. En fait, cela consiste, entre autres, à reconnaître la mathématique dans une tâche ou un problème (interpréter un message) et à pouvoir les utiliser pour exécuter cette tâche ou résoudre ce problème tout en laissant des traces de son raisonnement (produire un message) (MEQ, 2006a).

L'interprétation et la production d'un message mathématique se construisent et trouvent leur sens par les interactions entre pairs. En effet, communiquer consiste à partager son raisonnement, son point de vue et ses stratégies pour résoudre des problèmes donnés en les verbalisant ou en les écrivant en vue de les comparer (observer les ressemblances et les différences), de faire des liens entre eux, de constater leur efficacité, etc.

C'est d'ailleurs dans le cadre de ces échanges et de ces discussions que le sens des concepts et des processus mathématiques ainsi que celui du vocabulaire mathématique sont négociés par les élèves, qui sont soutenus par l'enseignant. Pour que l'élève puisse communiquer et rendre accessible son raisonnement aux autres, l'utilisation d'un vocabulaire approprié et précis ainsi que le recours aux modes de représentation, dont le symbolisme, sont essentiels puisqu'ils soutiennent ses propos. Comme le dit si bien le poète Boileau, « ce qui se conçoit bien s'énonce clairement, et les mots pour le dire arrivent aisément ». En ce sens, la compréhension conceptuelle est au service de la communication, qui, à son tour, est au service de la compréhension conceptuelle. Ces deux dimensions se nourrissent mutuellement (MEQ, 2006a).

L'engagement cognitif et la participation active de l'élève au cours de la communication peuvent être observés lorsqu'il :

- verbalise son raisonnement;
- échange et discute avec ses pairs;
- communique à l'aide du vocabulaire mathématique;
- utilise des modes de représentation variés.

L'élève verbalise son raisonnement

Une des dimensions importantes de la communication en mathématique, qui est de plus en plus documentée, est la verbalisation, à l'oral ou à l'écrit, du raisonnement par l'élève (Bednarz, 2005; Radford et Demers, 2004; MEO, 2011b; Rhéaume, 2012; Gersten, Beckmann, Clarke, Foegen, Marsh, Star et Witzel, 2009; Bednarz, Gattuso et Mary,1995). En effet, comme le rapporte Bednarz (2005, p. 23) :

> *La capacité [...] de mettre en mots les raisonnements importants est une habileté centrale en mathématiques. Cette verbalisation permet de construire un sens aux concepts, aux raisonnements et au symbolisme en mathématiques.*

La verbalisation du raisonnement contribue à consolider la compréhension conceptuelle de l'élève, car elle l'amène à s'exprimer le plus clairement possible et à rendre accessibles ses idées, ses observations, les liens et les relations logiques qu'il établit, les arguments qui l'amènent à faire certains choix ou à prendre des décisions. La verbalisation permet également à l'élève de se familiariser avec le vocabulaire mathématique et les modes de représentation, comme les mots, les dessins, les schémas, les tableaux, les diagrammes, le matériel de manipulation et les symboles, et de se les approprier pour exprimer ses réflexions et son raisonnement mathématique.

Finalement, cela permet à l'enseignant d'avoir accès au raisonnement de l'élève et de réajuster son enseignement pour le faire progresser. Il pourra y arriver en manipulant les variables didactiques du problème, en questionnant l'élève sur certains aspects de son raisonnement ou en expliquant de nouveau certains concepts déjà institutionnalisés.

L'élève échange et discute avec ses pairs

La classe de mathématique est un lieu propice à la réflexion et au raisonnement lorsque l'enseignant propose à ses élèves des problèmes. Ceux-ci peuvent impliquer le travail d'équipe, où les élèves sont invités à mettre en commun plusieurs idées afin de construire un raisonnement pouvant mener à une solution commune (Houle, 2016b). Cette idée est également soutenue dans le schéma du PFEQ (MEQ, 2006b, p. 124) où l'on illustre que la mathématique implique un travail de coopération entre les élèves, des discussions, des débats, des activités d'exploration, etc.

La classe devient un lieu riche d'apprentissages lorsque l'enseignant invite ses élèves à partager et à justifier leurs solutions et leurs stratégies, à les comparer avec celles de leurs camarades, à s'entraider, à se questionner entre eux pour non seulement mieux comprendre les points de vue des autres, mais aussi contester les idées de leurs pairs.

C'est par ces échanges et ces discussions que l'enseignant favorise l'engagement cognitif et la participation active des élèves, ce qui a pour effet d'élargir leurs façons de résoudre des problèmes en plus d'améliorer leur compréhension conceptuelle (MEO, 2007).

Dans ce cadre, l'enseignant peut également être questionné au besoin. Cependant, ce dernier n'a pas pour mandat de donner explicitement des éléments de réponse. Il doit plutôt poser certaines questions aux élèves de manière à les guider dans leur compréhension de la tâche[15]. Cette concertation entre les élèves, soutenue par l'enseignant, permet à tout le groupe de tirer profit des différents raisonnements de ses membres plutôt que de se rabattre sur une seule façon de raisonner mise en avant par l'enseignant.

L'élève communique à l'aide du vocabulaire mathématique

L'utilisation d'un vocabulaire et d'un symbolisme mathématique appropriés est une autre manifestation de la communication de l'élève. Le PFEQ (MEQ, 2006a, 2006b et 2006c) et la progression des apprentissages en mathématique (MELS, 2009; MELS, 2010) accordent une place importante à cet apprentissage. Certains chercheurs ont indiqué plusieurs éléments qui justifient son importance. À ce sujet, Thompson et Rubenstein (2000) mentionnent notamment qu'on enseigne par le langage et qu'on évalue la compréhension de l'élève aussi par le langage, qu'il soit oral ou écrit. De plus, il faut considérer que, comparativement au vocabulaire courant, celui associé à la mathématique est appris et utilisé presque seulement en contexte scolaire. Comme le stipule le PFEQ au primaire et au secondaire (MEQ, 2006a, 2006b et 2006c)[16], l'élève développe peu à peu sa compétence à « communiquer à l'aide du langage mathématique », il s'approprie une terminologie spécifique et se familiarise avec la démarche de justification. L'élève découvre ainsi de nouveaux mots et parfois un nouveau sens à des mots connus. Comme le rapportent Pierce et Fontaine (2009), plusieurs mots de vocabulaire en mathématique sont polysémiques et ont un sens différent de celui du langage courant. Cela amène parfois l'enseignant à penser qu'un élève ne comprend pas un concept, alors que c'est plutôt la terminologie qui lui est associée qui engendre une difficulté. Il est donc important que l'enseignant soit explicite au regard de la signification du vocabulaire qu'il utilise. Il est également nécessaire que l'enseignant utilise le vocabulaire mathématique adéquatement et dans plusieurs contextes.

15. Pour plus d'information et des exemples de questions, voir MEO, 2011a.

16. PFEQ pour l'enseignement primaire (MEQ, 2006a, p. 62 et 124); PFEQ pour l'enseignement secondaire premier cycle (MEQ, 2006b, p. 232) et PFEQ pour l'enseignement secondaire deuxième cycle (MEQ, 2006c, p.125).

Le tableau qui suit présente quelques exemples de mots qui ont une signification mathématique différente de celle de la vie courante.

Tableau 4 Exemples de mots ayant une signification différente en mathématique par rapport à la vie courante[17]

Mot	Signification courante	Signification mathématique
Différence	Caractère *(une différence)* ou ensemble de caractères *(la différence)* qui distinguent une chose d'une autre ou un être d'un autre.	Résultat d'une soustraction.
Volume	Livre.	Espace occupé par un objet.
Mode	Manière collective de faire quelque chose (ex. : se vêtir).	Donnée qui se trouve le plus souvent dans un ensemble de données.
Facteur	Travailleur traitant et distribuant le courrier.	Chacun des termes intervenant dans la multiplication.
Sommet	Point le plus élevé en altitude d'un lieu ou point le plus haut d'un objet.	Dans le contexte d'une figure géométrique, point particulier d'une figure, situé à la rencontre de deux côtés ou arêtes de cette figure.

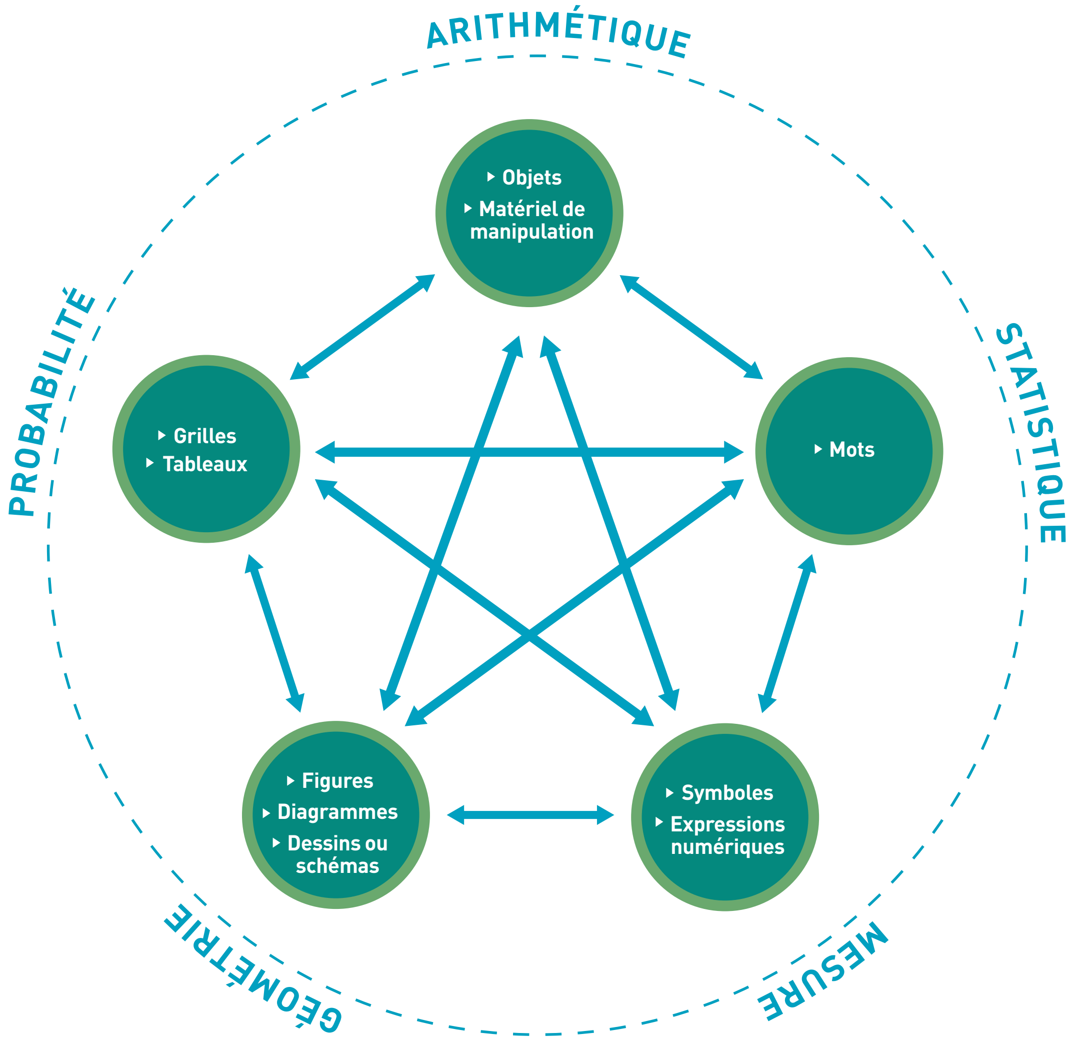
L'élève utilise des modes de représentation variés

Finalement, l'élève s'engage cognitivement dans l'activité mathématique ou y participe activement lorsqu'il communique en appuyant ses propos à l'aide de modes de représentation ou en les combinant pour expliciter sa pensée mathématique. À cet égard, le MEQ (2006a, 2006b et 2006c) précise que les élèves communiquent en mathématique en utilisant les différents modes de représentation suivants :

- mots;
- symboles et expressions numériques;
- dessins ou schémas, diagrammes et figures;
- grilles et tableaux;
- matériel de manipulation.

17. Voir le PFEQ du deuxième cycle du secondaire (MEQ, 2006c, p.125) pour plus de précision quant aux particularités des registres verbales et symboliques (types de phrase, sens des termes, rôle des symboles, lecture des symboles et des expressions et signification des symboles).

Figure 7 Modes de représentation en mathématique[18]



Ces différents modes de représentation peuvent être utilisés par l'élève et par l'enseignant, de façon isolée ou combinés entre eux, afin de donner du sens à un ou à des concepts et processus ou encore de soutenir des propos lors du partage d'un raisonnement à l'oral ou à l'écrit. Il est important que l'élève se montre flexible dans le passage d'un mode de représentation à un autre (NCTM, 2000; Pape et Tchoshanov, 2001). En effet, comme le précise Duval (2007), chaque mode de représentation est incomplet en soi pour ce qui est de permettre, de comprendre et d'exprimer un raisonnement. En ce sens, une juxtaposition ou une articulation des modes de représentation est souhaitable et permet d'approfondir la compréhension conceptuelle et de soutenir la communication ainsi que le raisonnement.

18. Adaptation de la figure des registres de représentation par champ mathématique du PFEQ (enseignement secondaire, deuxième cycle, p. 124).

Ces propos sont également soutenus par le PFEQ (2006b, p.238) qui mentionne que :

> *Si les différents modes de représentation, qui se trouvent dans tous les champs de la mathématique, sont primordiaux pour l'appropriation des concepts, le passage d'un mode à un autre facilite la compréhension des situations auxquelles l'élève doit faire face.*

D'ailleurs, certaines études ont démontré que les élèves ayant de la difficulté à effectuer des passages entre les modes de représentation ont également de la difficulté à résoudre des problèmes et à raisonner à l'aide des concepts et des processus mathématiques.

L'élève utilise du matériel de manipulation

Le matériel de manipulation est un mode de représentation pour lequel certaines précisions doivent être apportées. En effet, l'utilisation du matériel de manipulation pour favoriser l'apprentissage de la mathématique est soutenue par des données probantes provenant de méta-analyses (Carbonneau, Marley et Selig, 2013; Jitendra, Nelson, Pulles, Kiss et Houseworth, 2016). **Cependant, le fait que les élèves aient en leur possession du matériel de manipulation ne produira pas à lui seul un apprentissage.** Il faut également que l'enseignant ait une intention d'apprentissage claire dont la prise en considération sera facilitée par ce matériel. Par exemple, si l'intention pédagogique est la compréhension des concepts d'arête et de sommet, la manipulation de solides en trois dimensions viendra soutenir la prise en compte de cette intention.

Par ailleurs, il est à noter que plusieurs auteurs privilégient la construction du sens des concepts et des processus mathématiques au moyen d'un continuum allant du concret (matériel de manipulation) au semi-concret (dessin, schéma) pour se terminer avec l'abstrait (symboles écrits) (Forbringer et Fuchs, 2014; Mercer et Miller, 1992; Baker, Gersten et Lee, 2002). Ce continuum s'applique bien aux premiers apprentissages mathématiques (dénombrement, opérations d'addition et de soustraction, etc.). Toutefois, pour certains concepts plus abstraits tels que les nombres négatifs et l'algèbre, ce continuum semble difficilement applicable. Duval (2007) considère d'ailleurs qu'une articulation entre les modes de représentation est plus efficace qu'un continuum. Pour leur part, Corriveau et Jeannotte (2015) nuancent encore davantage en mentionnant que le matériel de manipulation ne sert pas à concrétiser la mathématique, mais bien à soutenir le raisonnement des élèves.

À l'égard du matériel de manipulation, Van de Walle et Lovin (2007, p. 9) mentionnent ce qui suit :

> *L'erreur la plus courante commise par les enseignants quant au matériel de manipulation consiste à structurer les leçons de telle sorte que les élèves suivent à la lettre les consignes sur la façon d'utiliser un modèle [...]. Ceux-ci adopteront aveuglément les consignes de l'enseignante et peuvent même donner faussement l'impression de les avoir comprises.*

Le matériel de manipulation, comme tout mode de représentation, doit être exploré et utilisé avec souplesse pour soutenir la représentation et la compréhension des concepts et des processus mathématiques ou pour traduire un raisonnement ou une réflexion mathématique qu'on veut communiquer. **L'élève doit comprendre que le matériel de manipulation n'est pas la représentation du concept, mais bien une façon parmi tant d'autres de le**

représenter. En ce sens, le recours à un matériel de manipulation varié pour représenter un même concept est à privilégier.

Par ailleurs, donner du matériel de manipulation aux élèves sans le présenter pourrait ralentir la progression de leurs apprentissages. Il est donc important de présenter le matériel aux élèves en leur donnant certaines explications sur son fonctionnement. Par exemple, pour le matériel de base dix aux groupements apparents, mais non accessibles (blocs multibases), montrer aux élèves comment le matériel est construit et comment il peut être associé à une valeur (si un petit cube vaut une unité, alors un bâtonnet vaut dix, une plaque vaut cent, etc.). Par la suite, l'enseignant peut demander aux élèves de l'explorer pour en voir l'utilité. Ce même matériel peut être utilisé pour l'apprentissage des nombres décimaux. À ce moment, le petit cube peut valoir un centième, le bâtonnet, un dixième et la plaque, une unité. Ainsi, en étant utilisé selon différentes intentions d'apprentissage (nombres naturels, nombres décimaux, etc.), le matériel de base dix n'est pas associé à un seul concept.

L'exploitation efficace du matériel de manipulation par l'enseignant implique un questionnement qui suscite la réflexion de l'élève. Cette réflexion amenée par le questionnement est liée positivement à une augmentation du rendement scolaire et à une amélioration de l'attitude de l'élève à l'égard de la mathématique (MELS, 2012a).

L'exploitation du matériel de manipulation en classe implique aussi pour l'enseignant d'amener l'élève à passer de ce matériel aux autres modes de représentation utilisés en mathématique (mots à l'oral ou à l'écrit, symboles, dessins ou schémas, diagrammes et tableaux).

Mentionnons que les différents éléments présentés par rapport à la communication tels que la verbalisation, les interactions entre pairs, le vocabulaire mathématique et les modes de représentation, sont interdépendants. En effet, la verbalisation est à la base des échanges entre pairs et ces échanges permettent à chacun d'évoluer dans la verbalisation de sa pensée. Le vocabulaire et les modes de représentation se développent également par et pour les échanges entre pairs. Le développement de ces quatre éléments est donc essentiel, non seulement pour la communication, mais aussi pour le développement du raisonnement et de la compréhension en mathématique.

> En résumé, l'engagement cognitif et la participation active de l'élève dans l'activité mathématique se manifestent notamment lorsqu'il raisonne et communique. L'enseignant peut jouer un rôle de catalyseur du raisonnement en posant différents types de questions. Il peut également manipuler les variables didactiques des problèmes afin de faire évoluer le raisonnement. Durant son parcours scolaire, l'élève sera appelé à justifier ses propos à l'aide de concepts et de processus mathématiques (au primaire) pour ensuite émettre des conjectures et formuler des preuves au secondaire.
>
> Pour ce qui est de la communication, elle se manifeste lorsque l'élève verbalise son raisonnement, échange avec ses pairs, utilise un vocabulaire mathématique approprié et recourt à des modes de représentation variés. Encore une fois, tous ces éléments sont liés et s'influencent mutuellement.

Mettre en place un climat de classe favorisant l'engagement cognitif et la participation active de l'élève

Pour actualiser l'activité mathématique en classe, des actions permettant de créer un climat propice à l'engagement cognitif et à la participation active de l'élève sont nécessaires. Cet élément est d'ailleurs au cœur du contexte pédagogique abordé par le PFEQ (MEQ, 2006b, p. 237) pour l'apprentissage de la mathématique :

> *Pour susciter l'engagement de l'élève, l'enseignant doit créer un climat qui permet à l'élève de prendre sa place à l'intérieur de la classe, sa communauté d'apprentissage.*

Certains auteurs ont établi différents facteurs qui favorisent l'engagement cognitif de l'élève et sa participation active dans l'apprentissage de la mathématique.

Il s'agit pour l'enseignant :

- de **faire de la classe une communauté d'apprenants**[19] (MELS 2012a ; MEO, 2007; MEQ, 2006a; MEQ, 2006b; MEQ, 2006c; Small, 2013 Van de Walle et Lovin, 2007);
- d'**adopter une attitude positive à l'égard de la mathématique** (MEQ, 2006a, MEO, 2007);
- de **considérer l'erreur comme une étape nécessaire à l'apprentissage** (Astolfi, 2012; Brousseau, 2001; Charnay et Mante, 1991; DeBlois, 2014, MELS, 2012a);
- d'**établir explicitement le rôle de l'élève et celui de l'enseignant dans l'activité mathématique** (Charnay et autres, 2005).

Faire de la classe une communauté d'apprenants

De nombreux auteurs insistent sur l'importance de faire de la classe de mathématique une communauté d'apprenants (Small, 2013; De Corte et Verschaffel, 2008; Van de Walle et Lovin, 2007; MEQ, 2006a, MEQ, 2006b, MEQ, 2006c, MELS 2012a). Selon Boutin et Gouin (2017), « la communauté d'apprentissage est une approche pédagogique et d'organisation de classe qui engage les élèves à communiquer et à travailler ensemble vers des buts communs ». Dans une communauté d'apprenants, les élèves prennent part aux discussions de la classe; ils partagent et construisent avec les autres. De plus, ils sont encouragés à offrir une rétroaction à leurs pairs. Faire de la classe une communauté d'apprenants, c'est multiplier les occasions d'interaction. Comme le mentionnent De Corte et Verschaffel (2008, p. 38) :

> *[...] les interactions sociales sont essentielles à l'apprentissage des mathématiques, la construction individuelle des connaissances apparaissant comme la résultante de processus d'interaction, de négociation et de coopération. La littérature de recherche fourmille d'éléments soulignant les effets positifs de l'apprentissage collaboratif sur la réussite scolaire.*

19. Certains auteurs utilisent le terme « communauté d'apprentissage », alors que d'autres renvoient au même concept en utilisant le terme « communauté d'apprenants ». Ces deux termes seront donc considérés comme synonymes dans ce document.

En ce sens, Hiebert et ses collaborateurs (1997) présentent quatre aspects qui permettent d'optimiser les interactions entre les membres de la communauté d'apprenants :

- les idées sont importantes, quelle que soit leur origine;
- les idées doivent être partagées avec les autres élèves de la classe;
- un climat de confiance dans lequel l'erreur est considérée comme nécessaire à l'apprentissage doit être établi;
- les élèves doivent réaliser que la mathématique est logique.

Concrètement, il s'avère important de mettre en place un climat de confiance et de respect, où la prise de risques est valorisée et où les erreurs sont autorisées par l'enseignant et les pairs. Pour ce faire, l'enseignant doit favoriser les discussions avec et entre les élèves pour comprendre leur raisonnement et les amener à s'intéresser aux façons de faire des autres et à considérer qu'il existe plus d'une stratégie permettant de trouver des solutions à des problèmes. Pour cela, le choix des problèmes est très important. Il faut choisir des problèmes adaptés aux connaissances des élèves et qui suscitent les réflexions et les discussions. En ce sens, l'enseignant ne détient pas à lui seul le savoir. Il agit plutôt comme médiateur entre les savoirs mathématiques des élèves et ceux visés par l'apprentissage.

La communauté d'apprenants contribue donc à la mise en place d'un climat permettant à la classe de devenir un lieu qui permet d'apprendre de ses erreurs, d'apprendre des autres et d'apprendre avec les autres.

Adopter une attitude positive à l'égard de la mathématique

Plusieurs études ont montré qu'une attitude positive de l'enseignant à l'égard de la mathématique avait un effet bénéfique sur l'apprentissage des élèves (MEO, 2007; Small, 2013). Concrètement, cela se traduit d'abord par le fait de montrer de l'enthousiasme en enseignant cette discipline. L'établissement de liens avec des repères culturels, tels que des capsules historiques portant sur de grands mathématiciens ou sur le développement de certains concepts mathématiques, ou encore avec des situations de la vie quotidienne contribue à rendre la mathématique intéressante et à montrer son utilité (Van de Walle et Lovin, 2007; Small, 2013).

Un enseignant peut aussi contribuer à développer chez ses élèves un rapport favorable avec la mathématique en les amenant à observer qu'elle est omniprésente dans l'environnement et à faire des liens avec des situations vécues à la maison ou en salle de classe, ainsi qu'en leur proposant des problèmes signifiants qui suscitent leur intérêt et leur engagement. Ces problèmes favorisent le développement d'une attitude positive à l'égard de la mathématique dans la mesure où :

- ils font du sens pour les élèves, c'est-à-dire que le contexte des problèmes est familier et approprié compte tenu de leurs connaissances culturelles et linguistiques;
- ils rejoignent les champs d'intérêt et les préoccupations du groupe d'âge des élèves;
- ils sont accessibles aux élèves, c'est-à-dire qu'ils ne sont ni trop simples ni trop difficiles pour eux étant donné leur bagage mathématique.

Dans un autre ordre d'idées, le MEO (2006) considère que l'analyse réflexive des pratiques d'enseignement entre collègues enseignants et de l'apprentissage des élèves permet le développement d'une attitude positive à l'égard de l'enseignement de la mathématique. Cela permet également aux enseignants d'approfondir leur compréhension du programme à suivre, du développement des concepts et des processus mathématiques de même que des stratégies d'enseignement pouvant être utilisées.

Finalement, le fait de donner du sens à la mathématique en misant sur la compréhension conceptuelle et en accordant une place prépondérante à la résolution de problèmes contribue à l'établissement d'un rapport positif à l'égard de cette discipline. Plus précisément, la compréhension conceptuelle permet à l'élève de comprendre le sens des concepts et des processus mathématiques qu'il construit et la résolution de problèmes crée un contexte signifiant permettant leur utilisation.

Considérer l'erreur comme une étape nécessaire à l'apprentissage

Un élément qui génère souvent de l'anxiété par rapport à la mathématique chez les élèves est la peur de faire des erreurs, ce qui en freine plusieurs dans leur investissement cognitif à l'égard de la tâche.

Astolfi (2012) cerne certains enjeux quant à la place de l'erreur en mathématique. Il constate que l'erreur est souvent considérée par l'enseignant comme étant :

- une preuve des « ratés » d'apprentissage de l'élève;
- une preuve de ses propres « ratés » d'enseignement;
- une crainte de devoir analyser le raisonnement de l'élève, c'est-à-dire de devoir « entrer dans sa tête ».

Selon ces trois perceptions, l'erreur est vue de façon négative par l'enseignant de même que l'élève et l'acte d'apprendre est ainsi réduit à la « production de bonnes réponses ». Dans le premier cas, l'erreur est vue comme appartenant à l'élève. L'enseignant a alors pour rôle de faire voir cette erreur à l'élève pour qu'il la corrige afin d'obtenir rapidement une réponse « juste ». Dans le deuxième cas, l'erreur remet en doute la compétence de l'enseignant et mène souvent à une dévalorisation professionnelle. Ainsi, l'enseignant cherche à éviter les erreurs, les percevant comme le résultat d'un enseignement imparfait. Dans le troisième cas, l'erreur est associée à une crainte de devoir analyser le raisonnement qui a conduit à une mauvaise réponse chez l'élève.

L'erreur peut cependant acquérir un statut positif lorsqu'elle est considérée comme nécessaire dans le processus d'apprentissage. Dans cette perspective, l'enseignant doit non seulement accepter sa présence, mais parfois même la provoquer. Qui plus est, l'erreur peut être utilisée comme levier pour faire progresser l'apprentissage des élèves (MEQ, 2006c). Elle devient un outil qui favorise la confrontation d'idées, les échanges, la justification, etc. Bref, elle permet à la communauté d'apprenants de progresser dans sa compréhension conceptuelle. Elle témoigne également du niveau de compréhension actuel de l'élève et des obstacles qu'il rencontre dans son apprentissage de la mathématique. L'enseignant pourra fonder son intervention sur ces constats et ainsi mieux le soutenir.

De son côté, Brousseau (1998) a déterminé trois types d'obstacles :

- l'obstacle ontogénique;
- l'obstacle didactique;
- l'obstacle épistémologique.

Un obstacle ontogénique survient lorsque l'élève commet une erreur concernant son stade de développement par rapport à la tâche. Par exemple, un élève du préscolaire conçoit qu'une collection ayant été dispersée a une cardinalité plus grande que cette même collection avant la dispersion. À son âge, la perception spatiale l'emporte sur le dénombrement.

L'obstacle didactique est lié à l'enseignement. Par exemple, si l'on présente toujours à l'élève un triangle rectangle en le faisant reposer sur sa base, il associera le concept de triangle rectangle à sa représentation (sa position dans l'espace) et non à ses propriétés. Ainsi, il considérera qu'un triangle rectangle qui repose sur son plus long côté n'en est pas un, car l'angle droit ne se situe pas entre un côté horizontal et un côté vertical.

Un obstacle épistémologique est associé à l'apprentissage de la discipline, auquel on ne peut pas échapper. Par exemple, historiquement, les nombres négatifs ont généré de nombreuses réflexions et plusieurs désaccords chez les mathématiciens. Le concept de nombre négatif en soi engendre un obstacle dans l'apprentissage des élèves puisqu'il est abstrait et contre-intuitif. DeBlois (2011) mentionne que la construction des concepts et des processus mathématiques est marquée non seulement par des tremplins, mais aussi par des obstacles que les enseignants gagneraient à mieux connaître[20].

Ces trois types d'obstacles peuvent servir de cadre d'analyse des erreurs de l'élève pour faire évoluer sa compréhension conceptuelle : l'enseignant peut se demander si l'erreur est liée à des caractéristiques développementales de l'élève, à des actions qu'il a commises ou à des caractéristiques des concepts et des processus en jeu. L'erreur devient donc une alliée puisqu'elle permet d'avoir accès au raisonnement de l'élève (MELS, 2012a). **Dans tous les cas, l'erreur est considérée comme positive puisqu'elle est nécessaire pour faire évoluer l'apprentissage.** De plus, l'enseignant devra anticiper ces obstacles, particulièrement les obstacles épistémologiques et didactiques, et planifier des interventions pour aider à les franchir. Cela constitue l'analyse *a priori*. Pour ce faire, une bonne connaissance des liens entre les différents concepts et processus mathématiques ainsi qu'une vue d'ensemble de l'apprentissage de la mathématique dans la trajectoire scolaire de l'élève sont nécessaires (MELS, 2012a).

L'erreur occupe également une place importante dans la résolution de problèmes. L'analyse des erreurs des élèves dans ce contexte peut générer un besoin de soutenir l'apprentissage de stratégies cognitives et métacognitives au service de la résolution de problèmes ou générer de nouveaux problèmes à résoudre qui feront évoluer la compréhension conceptuelle.

Par ailleurs, un rapprochement peut être effectué entre le statut de l'erreur, tel qu'il a été présenté, et la rétroaction. Hattie (2009) mentionne que la rétroaction la plus puissante est celle que les élèves donnent à l'enseignant. Toujours selon cet auteur, l'enseignant devrait solliciter l'élève afin de prendre connaissance de ce qu'il connaît, de ce qu'il comprend, de ce qui l'induit en erreur, etc. Ainsi, il pourrait ajuster son enseignement en fonction des informations recueillies. Vue sous cet angle, la rétroaction s'appuie sur un statut positif de l'erreur.

Finalement, lorsque l'erreur est vue comme faisant partie intégrante du processus d'apprentissage et que des dispositifs pédagogiques tels les problèmes qui provoquent des erreurs; les questions qui suscitent des conflits cognitifs chez l'élève et l'enseignement de stratégies cognitives et métacognitives sont mis en place pour aider à la surmonter, l'engagement cognitif et la participation active de l'élève dans son apprentissage sont favorisés.

20. Small (2013) et Poirier (1997) précisent plusieurs de ces obstacles épistémologiques.

Les propos d'Artigue (2009, p. 14) résument bien le rôle que joue l'erreur dans l'apprentissage de la mathématique :

> *Je dirais que ce qui me paraît aujourd'hui important [...] c'est de ne pas considérer les erreurs des élèves comme des objets isolés, de simples manques, mais d'essayer de restituer la cohérence qui leur est sous-jacente, de la comprendre et de penser en fonction de cette compréhension les moyens d'action; c'est d'aider les élèves à développer des modes de contrôle diversifiés de leur travail; c'est aussi d'apprendre à évaluer le potentiel d'occasions d'apprentissage que recèlent les erreurs qu'ils font et d'essayer de les exploiter au mieux; c'est enfin de m'interroger réflexivement sur la façon dont je gère les erreurs de mes étudiants et les effets possibles, productifs et contre-productifs de cette gestion.*

Établir explicitement le rôle de l'élève et celui de l'enseignant dans l'activité mathématique

Plusieurs auteurs ont rapporté les croyances des élèves par rapport à l'apprentissage de la mathématique (Brousseau, 1998; DeBlois, 2010; De Corte et Verschaffel, 2008; Lampert, 1990; Schoenfeld, 1992.) Les quelques croyances suivantes des élèves ont été relevées par Lampert (1990, cité dans Verschaffel et De Corte, 2008, p. 32) :

- que les mathématiques sont associées à l'idée de certitude et à la possibilité de donner une réponse correcte rapidement;
- que faire des mathématiques correspond à l'application de règles enseignées par l'enseignant;
- que faire des mathématiques signifie être capable de rappeler et d'utiliser les règles correctes quand l'enseignant le demande;
- que la réponse à une question mathématique ou à un problème est vraie quand elle a été approuvée par l'enseignant.

Ces croyances influencent le contrat didactique en vigueur dans la classe. Brousseau (1998) a défini le contrat didactique comme étant les comportements attendus de l'élève par l'enseignant ainsi que les comportements attendus de l'enseignant par l'élève qui définissent le fonctionnement de la classe. Toujours selon Brousseau (1998), le contrat didactique est majoritairement implicite et plusieurs effets peuvent lui être attribués. Le problème portant sur l'âge d'un capitaine, un exemple célèbre d'effet du contrat didactique[21], a été relevé notamment par Baruk (1985). Ainsi, le problème suivant avait été proposé à 97 élèves de première et de deuxième année du primaire : « Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine? » Dans cette tâche, 76 des 97 élèves ont établi que le capitaine avait 36 ans en additionnant 26 et 10. Cela illustre la croyance des élèves selon laquelle tous les problèmes présentés par l'enseignant doivent avoir une réponse qu'on trouve à partir des données fournies.

21. Brousseau (1998) a relevé différents effets du contrat didactique. Plusieurs de ces effets sont définis dans le document suivant : **http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf**.

Les croyances présentées ci-dessus se développent implicitement chez les élèves lorsque leur expérience en classe de mathématique est associée à l'apprentissage de règles et de procédures transmises par l'enseignant et qu'ils jouent un rôle passif dans cette expérience ou lorsque les problèmes proposés sont toujours directement en lien avec les derniers concepts enseignés. Afin de pouvoir actualiser l'activité mathématique telle qu'elle est définie dans le présent document, l'enseignant doit sensibiliser les élèves aux croyances qui peuvent entraver cette activité et formuler explicitement de nouvelles attentes par rapport aux rôles de l'élève et de l'enseignant dans l'enseignement-apprentissage de la mathématique (Charnay et autres, 2005).

Voici quelques exemples d'attentes qui peuvent être mentionnées aux élèves par l'enseignant de façon explicite :

- « Un problème peut être résolu de plusieurs façons et on gagne à essayer de comprendre les solutions qui sont différentes de la nôtre. Cela implique que vous devez être à l'écoute des autres élèves et tenter de comprendre leur raisonnement en posant des questions au besoin. »
- « J'accorderai beaucoup d'importance non seulement à l'application de «trucs» ou de procédures, mais également à la compréhension des concepts. »
- « Le fait de commettre des erreurs est tout à fait normal lorsqu'on fait l'apprentissage de la mathématique; on peut apprendre de ces erreurs. Je vous encouragerai toujours à prendre des risques et à partager votre raisonnement avec le groupe sans craindre de commettre une erreur. »
- « Je vous demanderai fréquemment d'exprimer à haute voix votre raisonnement pour que chacun puisse apprendre de l'autre. »
- « Lorsque vous ne comprendrez pas une tâche, je ne vous donnerai pas la solution. Je vous poserai des questions pour tenter de vous faire cheminer. »
- « Les problèmes que je vous propose ne sont pas toujours en lien avec les concepts que nous venons d'apprendre. »
- « Vous serez invités fréquemment à travailler en dyades. Vous devrez alors confronter respectueusement vos points de vue afin que chacun puisse évoluer dans sa compréhension de la mathématique. »

En résumé, l'enseignant doit être à l'affût des comportements qui, chez ses élèves, proviennent de croyances développées au fil de leur expérience scolaire et qui nuisent souvent à l'activité mathématique. Il pourra alors leur faire prendre conscience de ces comportements à éviter et formuler explicitement des attentes différentes qui demanderont à l'élève d'être engagé cognitivement et de participer activement. Pour sa part, comme le mentionne le PFEQ (2006c, p.13) l'enseignant :

> *[...] joue divers rôles auprès de l'élève : il l'accompagne, le guide, l'encourage et le motive dans la compréhension et la construction des concepts et des processus mathématiques.*

En résumé, l'enseignant doit créer un climat de classe propice à l'engagement des élèves dans l'activité mathématique. Cela peut se faire en :

- adoptant une attitude positive à l'égard de la mathématique :
  - avoir une bonne connaissance du programme à enseigner ainsi que des concepts et des processus mathématiques et des liens entre eux,
  - tenir compte des repères culturels des élèves,
  - proposer des tâches signifiantes;
- considérant l'erreur comme une étape nécessaire à l'apprentissage :
  - se servir de l'erreur comme levier pour l'apprentissage de la mathématique,
  - analyser l'erreur et déterminer si elle est liée à un obstacle ontogénique (stade de développement de l'élève), à un obstacle didactique (enseignement donné) ou à un obstacle épistémologique (spécificité du savoir mathématique en jeu) afin de choisir les interventions appropriées pour aider à surmonter l'obstacle en question;
- établissant explicitement le rôle de l'élève et celui de l'enseignant dans l'activité mathématique :
  - prendre le temps d'analyser les croyances des élèves par rapport à l'enseignement et à l'apprentissage de la mathématique,
  - exprimer des attentes qui sont compatibles avec l'activité mathématique souhaitée.

Ces différents éléments permettent de faire de la classe de mathématique une communauté d'apprenants où l'apprentissage collectif est un levier important pour l'apprentissage de chacun des membres.

Conclusion

L'objectif du *Référentiel d'intervention en mathématique* est de définir en quoi consiste l'apprentissage de la mathématique en s'appuyant sur des recherches menées en ce qui concerne l'enseignement-apprentissage de cette discipline au cours des quarante dernières années par des auteurs s'inscrivant principalement dans le champ d'étude lié à l'enseignement de la mathématique (*mathematics education*) et celui de la didactique. Une vision de l'apprentissage des concepts et des processus mathématiques, axée principalement sur la compréhension conceptuelle, a été mise en avant. Pour sa part, la résolution de problèmes a été présentée comme un contexte pédagogique authentique qui joue un rôle prépondérant dans l'apprentissage des concepts et des processus mathématiques.

L'enseignement-apprentissage de la mathématique consiste donc à faire évoluer le bagage mathématique de l'élève en lui proposant des problèmes de plus en plus complexes qui entraînent chez lui la nécessité de faire évoluer ce bagage. Cela lui permet de développer des outils mathématiques pouvant être mobilisés dans divers contextes et, par le fait même, d'approfondir la compréhension des concepts en jeu. Ainsi, l'élève se rapproche de l'activité réelle du mathématicien : résoudre des problèmes.

Cette façon de concevoir l'enseignement-apprentissage de la mathématique induit une posture chez l'élève et l'enseignant. En effet, l'élève devra être engagé cognitivement dans la résolution des problèmes qu'on lui propose et y participer activement. Il sera invité à prendre des risques, à faire des essais sans craindre de commettre des erreurs et à proposer une solution qu'il juge appropriée à partir de ce qu'il comprend d'un problème. Il sera appelé à justifier son raisonnement, à confronter ses idées avec celles de ses pairs et à communiquer à l'aide de modes de représentation variés. Cela lui permettra de construire et de parfaire sa compréhension des concepts et des processus mathématiques. Pour sa part, l'enseignant n'a plus comme rôle de transmettre des connaissances mathématiques. Il doit plutôt proposer des problèmes présentant un défi pour l'élève tout en étant adaptés à son bagage mathématique. Il l'accompagne alors dans la résolution de ces problèmes en proposant des temps d'arrêt au cours desquels il pose des questions, amène l'élève à reformuler et à bonifier certains de ses propos, l'incite à partager son raisonnement, etc. Il peut également enseigner des stratégies cognitives et métacognitives à utiliser pour résoudre des problèmes en veillant à ce que cela ne prenne pas la forme d'une démarche séquentielle à suivre pas à pas, qui éloigne la plupart du temps l'élève de l'activité mathématique. Dans ce contexte d'enseignement, la classe devient une communauté d'apprenants dans laquelle la collaboration entre les élèves constitue une valeur ajoutée par la richesse des solutions et des stratégies partagées.

Faire des mathématiques ne se réduit pas
à reproduire une technique enseignée.
Pour faire des mathématiques,
il faut chercher des solutions à des problèmes,
faire des essais, des erreurs,
se reprendre, etc.

Bibliographie

Allsopp, D. H., M. M. Kyger et L. H. Lovin (2007). *Teaching Mathematics Meaningfully: Solutions for Reaching Struggling Learners. Baltimore* : Paul H. Brookes.

Ansari, D. (2015). No More Math Wars: An Evidence-Based, Developmental Perspective on Math Education. *EdCan Network,* automne. Récupéré au **https://www.edcan.ca/articles/no-more-math-wars/**

Arslan, C., et Y. Yazgan (2015). Common and Flexible Use of Mathematical Non Routine Problem Solving Strategies. *American Journal of Educational Research,* 3(12), 1519-1523.

Artigue, M. (2009). *Le rôle de l'erreur*. Tangente éducation, 7, 12-14.

Ashcraft, M. H. (2002). Math Anxiety: Personal, Educational, and Cognitive Consequences. *Current Directions in Pyschology Science*, 11, 181-185.

Astolfi, J.-P. (2012). *L'erreur, un outil pour enseigner*. Paris : ESF Sciences humaines.

Baker, S., R. Gersten et D. S. Lee (2002). A Synthesis of Empirical Research on Teaching Mathematics to Low-Achieving Students. *The Elementary School Journal*, 103(1), 51-73.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.

Baroody, A. J., Y. Feil et A. Rittle-Johnson (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (2), 115-131.

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine de l'erreur en mathématiques*. Paris : Seuil.

Bednarz, N. (2005). Parler les mathématiques. *Vie pédagogique*, 136, 20-23.

Bednarz, N., L. Gattuso et C. Mary (1995). Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin AMQ*, 35(1), 17.

Berger, A. M. (2017). Using Number Talks to Build Procedural Fluency through Conceptual Understanding. *Ohio Journal of School Mathematics*, 75, 1-7.

Bissonnette, S., M. Richard, C. Gauthier et C. Bouchard (2010). Quelles sont les stratégies d'enseignement efficaces favorisant les apprentissages fondamentaux auprès des élèves en difficulté de niveau élémentaire? Résultats d'une méga-analyse. *Revue de recherche appliquée sur l'apprentissage*, 3(1), 1-35.

Boaler, J. (2015). *Fluency without Fear: Research Evidence on the Best Ways to Learn Math Facts*. Récupéré au **https://www.youcubed.org/evidence/fluency-without-fear/**

Boulet, G. (1993). *The Construction of the Unit Fraction Concept*. Thèse de doctorat non publiée. Université de Montréal.

Boutin. P. A., et J. A. Gouin (2017). *La communauté d'apprentissage : interagir pour apprendre ensemble*. Récupéré au **https://parlonsapprentissage.com/la-communaute-dapprentissage-interagir-pour-apprendre-ensemble/**

Bronfenbrenner, U. (1979). *The Ecology of Human Development: Experiments by Nature and Design*. Cambridge : Harvard University Press.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. Étude dans le cadre de la théorie des situations didactiques. *Petit x*, 57, 5-30.

Carbonneau, K. J., S. C. Marley et J. P. Selig (2013). A Meta-Analysis of the Efficacy of Teaching Mathematics with Concrete Manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380-400.

Carpenter, T. P., et R. Lehrer (1999). Teaching and Learning Mathematics with Understanding. Dans E. Fennema et T. Romberg (dir.), Mathematics Classrooms that Promote Understanding (p. 19-32). Mahwah : Lawrence Erlbaum Associates.

Chapin, S. H., C. O'connor et N. C. Anderson (2013). *Talk Moves: A Teacher's Guide for Using Classroom Discussions in Math, Grades K-6*. Sausalito : Math Solutions.

Charnay, R. (2003). L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant. *Math-École*, 209, 19-26.

Charnay, R., et M. Mante (1991). De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes, *Grand N*, 48, 37-64.

Charnay, R., Douaire, J., Valentin, D. et Guillaume, J.-C. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes* : CP cycle 2. Paris : Hatier.

Corriveau, C., et D. Jeannotte (2015). L'utilisation du matériel en classe de mathématiques au primaire : quelques réflexions sur les apports possibles. *Bulletin AMQ*, 55 (3), 32-49.

De Corte, E., et L. Verschaffel (2008). Apprendre et enseigner les mathématiques : un cadre conceptuel pour concevoir des environnements d'enseignement-apprentissage stimulants. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques* (p. 25-54). Bruxelles : De Boeck.

DeBlois, L. (2010). Et si on pensait les troubles du comportement autrement? *Nouvelles CSQ*, printemps, 21-24.

DeBlois, L. (2011). *Enseigner les mathématiques : des intentions à préciser pour planifier, guider et interpréter*. Québec : Presses de l'Université Laval.

DeBlois, L. (2014). Les tensions et les questions soulevées dans les rapports enseignement/apprentissage des mathématiques liés aux élèves dits en difficulté : réflexion issue des textes de cet ouvrage. Dans C. Mary, H. Squalli, L. Theis et L. DeBlois (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*. Regard didactique (p. 229-242). Québec : Presses de l'Université du Québec.

DeCaro, M. S., et B. Rittle-Johnson (2012). Exploring Mathematics Problems Prepares Children to Learn from Instruction. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 552-568.

Dionne, J. (1995). Modèle utilisé pour définir la compréhension des concepts mathématiques. Dans L. Saint-Laurent, J. Giasson, C. Simard, J. Dionne et É. Royer (dir.), *Programme d'intervention auprès des élèves à risque* (p. 199 213). Boucherville : Gaëtan Morin.

Duval, R. (2007). *La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée*. Récupéré au **https://gpc-maths.org/data/documents/duvalconversion.pdf**

Elia, I., M. van den Heuvel-Panhuizen et A. Kolovou (2009). Exploring Strategy Use and Strategy Flexibility in Non-Routine Problem Solving by Primary School High Achievers in Mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 41, 605-618.

Fagnant, A., I. Demonty et M. Lejong (2003). La résolution de problèmes : un processus complexe de « modélisation mathématique ». *Bulletin d'informations pédagogiques*, 54, 29-39.

Fagnant, A., I. Demonty et M. Lejong (2016). *Résoudre des problèmes : pas de problèmes! 10-12 ans*. Guide méthodogique et documents reproductibles. Bruxelles : De Boeck.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving. Dans L. B. Resnick (dir.), *The Nature of Intelligence* (p. 231-235). Hillsdale : Lawrence Erlbaum.

Focant, J., et J. Grégoire (2008). Les stratégies d'autorégulation cognitive : une aide à la résolution de problèmes arithmétiques. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques* (p. 201-221). Bruxelles : De Boeck.

Forbringer, L. L., et W. W. Fuchs (2014). *RtI in MATH. Evidence-Based Interventions for Struggling Students*. New York : Routeledge.

Gersten, R., S. Beckmann, B. Clarke, A. Foegen, L. Marsh, J. R. Star et B. Witzel (2009). *Assisting Students Struggling with Mathematics: Response to Intervention (RtI) for Elementary and Middle Schools*. Récupéré au **https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED504995.pdf**

Giroux, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. Dans C. Mary, H. Squalli, L. Theis et L. DeBlois (dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Regard didactique* (p. 11-44). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Goulet, M.-P. (2018). *Méthodes de résolution de problèmes écrits présentées au primaire : pratiques associées et effets de ces méthodes sur l'activité mathématique des élèves*. Thèse de doctorat inédite. Montréal : Université du Québec à Montréal.

Grabner, R. H., D. Ansari, K. Koschutnig, G. Reishofer, F. Ebner et C. Neuper (2009). To Retrieve or To Calculate? Left Angular Gyrus Mediates the Retrieval of Arithmetic Facts during Problem Solving. *Neuropsychologia*, 47, 604-608.

Hatano, G. (1982). Cognitive Consequences of Practice in Culture Specific Procedural Skills. *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, 4, 15-18.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*. New York : Routledge.

Hattie, J. (2017). *L'apprentissage visible pour les enseignants. Connaître son impact pour maximiser le rendement des élèves*. Québec : Presses de l'Université du Québec.

Heinze, A., J. R. Star et L. Verschaffel (2009). Flexible and Adaptative Use of Strategies and Representations in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education*, 41, 535-540.

Herscovics, N., et J. C. Bergeron (1982). Des modèles de la compréhension. *Revue des sciences de l'éducation*, 8(3), 576-596.

Hiebert, J., et T. P. Carpenter (1992). Learning and Teaching with Understanding. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 65-97). New York : McMillan.

Hiebert, J., T. Carpenter, E. Fennema, K. Fuson, D. Wearne, H. Murray, A. Oliver et P. Human (1997). *Making Sense-Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth : Heinemann.

Houle, V. (2016a). Étude de conditions didactiques favorables à la décontextualisation des connaissances mathématiques. *Revue canadienne des sciences de l'éducation*, 39(4), 1-19.

Houle, V. (2016b). *Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction*. Thèse de doctorat inédite. Québec : Université Laval.

Houle, V., et J. Giroux (2016). *Difficultés en mathématiques : contribution de différentes disciplines et plaidoyer en faveur d'une approche didactique*. Récupéré au **http://chroniques.uqam.ca/index.php/2016/12/25/difficultes/**

Jayanthi, M., et R. Gersten (2011). Effective Instructional Practices in Mathematics for Tier 2 and Tier 3 Instruction. Dans R. Gersten et R. Newman-Gonchar (dir.), *Understanding RTI in Mathematics: Proven Methods and Applications* (p. 109-125). Baltimore : Paul H. Brookes.

Jitendra, A. K., G. Nelson, S. M. Pulles, A. J. Kiss et J. Houseworth (2016). Is Mathematical Representation of Problems an Evidence-Based Strategy for Students with Mathematics Difficulties? *Exceptional Children*, 83(1), 8-25.

Kilpatrick, J., J. Swafford et B. Findell (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington : National Academy Press.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2014). La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants, *Éducation et francophonie*, 42 (2), 7-23.

Lampert, M. (1990). When the Problem is not the Question and the Solution is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research.*

Martin, V., et L. Theis (2009). Les élèves à risque au cœur d'une activité de résolution : l'exemple des probabilités. Récupéré au **http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT8/Microsoft%20Word%20-%20Martin%20et%20Theis-EMF2009.pdf**

Mary, C., H. Squalli et S. Schmidt (2008). Mathématiques et élèves en difficulté grave d'apprentissage : contexte favorable à l'interaction et au raisonnement mathématique. Dans J. M. Bisaillon et N. Rousseau (dir.), *Les jeunes en grande difficulté : contextes d'interventions favorables* (p. 167-192). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Mercer, C. D., et S. P. Miller. (1992). Teaching Students with Learning Problems in Math to Achieve, Understand and Apply Basic Math Facts. *Remedial and Special Education*, 13, 19-35.

Mercier, A. (2008). *Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : la résolution de problèmes. L'enseignement des mathématiques au primaire*. Acte du séminaire national. Paris, 13-14 novembre 2007, p. 93-116.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2007). *L'interaction entre élèves dans un cours de mathématiques : compétition ou échange d'idées?* Toronto : Gouvernement de l'Ontario. Consulté en ligne au **http://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/inspire/research/Bruce_fr.pdf**

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2011a). *L'art de questionner de façon efficace.* Récupéré au **http://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/inspire/research/CBS_AskingEffectiveQuestionsFr.pdf**

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2011b). *Communication et apprentissage – Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe de mathématiques.* Récupéré au **http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/monographie11.pdf**

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2006). *Guide de l'enseignement efficace des mathématiques, fascicule 2.* Toronto : Gouvernement de l'Ontario.

Ministère de l'Éducation du Québec (1988). *Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Résolution de problèmes. Orientation générale. Fascicule K.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (2006a). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire, enseignement primaire. Version approuvée.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (2006b). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (2006c). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation et de l'enseignement supérieur (2017a). *Politique de la réussite éducative. Le plaisir d'apprendre, la chance de réussir.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation et de l'enseignement supérieur (2017b). *Référentiel d'intervention en écriture*. Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2009). *Progression des apprentissages. Mathématique. Primaire.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2010). *Progression des apprentissages. Mathématique. Secondaire.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2011a). *Cadre d'évaluation des apprentissages. Mathématique. Enseignement primaire 1er, 2e et 3e cycle.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2011a). *Cadre d'évaluation des apprentissages. Mathématique. Enseignement secondaire 1er et 2e cycle.* Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. (2012a). *Agir autrement en mathématiques pour la réussite des élèves en milieu défavorisé*. Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (2012b). *Référentiel d'intervention en lecture pour les élèves de 10 à 15 ans.* Québec : Gouvernement du Québec.

Montague (2006). Self-Regulation Strategies for Better Math Performance in Middle School. Dans M. Montague et A. K. Jitendra (dir.), *Teaching Mathematics to Middle School Students with Learning Difficulties* (p. 89-107). New York : Guilford Press.

Montague, M., C. Warger et T. H. Morgan (2000). Solve It! Strategy Instruction to Improve Mathematical Problem Solving. *Learning Disabilities Research and Practice*, 15(2), 110-116.

Morin, M.-P. (2003). *Enseigner les mathématiques au primaire : le quoi ou le comment?* Montréal : Bande didactique.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School mathematics*. Reston : National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Procedural Fluency in Mathematics. A Position of the National Council of Teachers of Mathematics*. Récupéré au **https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Position** Statements/ Procedural-Fluency-in-Mathematics/

National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Récupéré au **http://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf**

Pape, S. J., et M. A. Tchoshanov (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory and Practice*, 40(2), 118-127.

Parrish, S. D. (2011). Number Talks Build Numerical Reasoning. Strengthen Accuracy, Efficiency, and Flexibility with these Mental Math and Computation Strategy. *Teaching Children Mathematics*, octobre, 198-206.

Picard, C. (2018). *Enseigner la résolution de problèmes. Accompagner les élèves de 5 à 12 ans dans le développement de la compétence à résoudre des problèmes.* Montréal : Chenelière Éducation.

Pierce, M. E., et L. M. Fontaine (2009). Designing Vocabulary Instruction in Mathematics. *The Reading Teacher*, 63(3), 239-243.

Poirier, L. (1997). *Les mathématiques en classe d'accueil : guide de l'enseignant.* Montréal : CECM.

Poirier, L. (2001). *Enseigner les mathématiques au primaire.* Notes didactiques. Montréal : ERPI.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton : Princeton University Press.

Radford, L., et S. Demers (2004). *Communication et apprentissage. Repères conceptuels et pratiques pour la salle de classe en mathématiques.* Récupéré au **http://www.luisradford.ca/pub/2004%20-%20Radford%20_%20Demers%20-%20 Communication%20et%20apprentissage.pdf**

Rhéaume, S. (2012). Parle-moi des mathématiques que tu fais… Élaboration d'un cadre de référence pour analyser le discours des élèves. *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (GDM). La recherche sur la résolution de problèmes : au-delà d'une compétence, au-delà des constats*, 117-126.

Rittle-Johnson, B., et J. R. Star (2007). Does Comparing Solution Methods Facilitate Conceptual and Procedural Knowledge? An Experimental Study on Learning to Solve Equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561-574.

Rittle-Johnson, B., R. S. Siegler et M. W. Alibali (2001). Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346-362.

Sarrazy, B. (1997). Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies métacognitives en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 17(2), 135-166.

Sarrazy, B. (2008). Différencier les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques : tenants idéologiques et enjeux didactiques. Dans A. Rouchier (dir.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (p. 115-134). Grenoble : La pensée sauvage.

Schneider, M., B. Rittle-Johnson et J. R. Star (2011). Relations among Conceptual Knowledge, Procedural Knowledge, and Procedural Flexibility in Two Samples Differing in Prior Knowledge. *Developmental Psychology*, 47(6), 1525-1538.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problems Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. Dans D. A. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (p. 334-370). New York : Macmillan.

Schoenfeld, A. H. 1985. *Mathematical Problem Solving*. Orlando : Academic Press.

Seeley, C. (2016). Une conversation avec Cathy Seeley. *L'Informatheur*, 10 octobre, 4-5.

Small, M. (2013). *Making Math Meaningful to Canadian Students*, K-8. Toronto : Nelson Education.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411.

Star, J. R., et C. Seifert (2006). The Development of Flexibility in Equation Solving. *Contemporary Educational Psychology*, 31, 280-300.

Stylianides, A. J., et G. J. Stylianides (2007). Learning Mathematics with Understanding: A Critical Consideration of the Learning Principle in the Principles and Standards for School Mathematics. *TMME*, 14(1), 103-114.

Thompson, D. R., et N. R. Rubenstein (2000). Learning Mathematics Vocabulary Potential Pitfalls and Instructional Strategies. *Mathematics Teachers*, 93 (7), 568-574.

Van de Walle, J.A. et Lovin, L.H. (2007). *L'enseignement des mathématiques. L'élève au centre de son apprentissage.* Tome 1. Montréal : ERPI.

Van de Walle, J.A., Lovin, L. H., Karp, K. S. et Bay-Williams, J. M. (2013). *Teaching Student-Centered Mathematics: Pearson New International Edition: Developmentally Appropriate Instruction for Grades Pre K-2.* New York : Pearson Education.

Verschaffel, L., B. Greer et E. De Corte (2000). *Making Sense of Word Problems.* Lisse : Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., et E. De Corte (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques* (p. 153-176). Bruxelles : De Boeck.

Verschaffel, L., K. Luwel, J. Torbeyns et W. Van Dooren (2009). Conceptualizing, Investigating, and Enhancing Adaptive Expertise in Elementary Mathematics Education. *European Journal of Psychology Education*, 24(3), 335-359.

Villani, C., et C. Torossian (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. Récupéré au http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf

Éducation
et Enseignement
supérieur
Québec